国家理科基地教材

泛函分析基础

刘培德 编著



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育分社理科编辑部
联系电话：010-64011132
E-mail: mph-edu@cspg.net





ISBN 7-03-016375-3
定 价：21.00 元

国家理科基地教材

泛函分析基础

刘培德　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书以简短的篇幅叙述了线性泛函分析的基础理论. 全书共分5章. 按章序分别讲解度量空间和赋范空间的拓扑知识与结构性质、有界线性算子和有界线性泛函的基本定理、共轭空间与共轭算子、Hilbert 空间的几何学以及线性算子的谱理论. 本书注重阐述空间和算子的基本理论, 取材既有简洁的一面又有深入的一面, 并适当引入了自反空间、一致凸空间等较新的内容, 在突出基本理论系统的同时, 有选择地叙述了在其他学科分支的应用.

本书可作为综合性大学、师范院校的理科各专业教材或参考书, 也可作为工科有关专业的研究生教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析基础/刘培德编著. —北京: 科学出版社, 2006
(国家理科基地教材)
ISBN 7-03-016375-3

I.泛… II.刘… III.泛函分析-高等学校-教材 IV.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 123338 号

责任编辑: 姚莉丽 祖翠娥 / 责任校对: 包志虹
责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年1月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2006年1月第一次印刷 印张: 14
印数: 1—4 000 字数: 270 000

定价: 21.00 元

前　　言

在从19世纪向20世纪转折的时期，分析数学中出现了抽象化的趋势，探求其中结论与方法的一般性和统一性是它的突出特点，泛函分析就是在这一进程中产生的. 这一趋势的出现并不是偶然的，一方面它反映了数学中积累的素材已经足够丰富，并且不同学科(包括经典分析、变分学、积分方程等)的某些对象之间显示了思想上和方法上的相似之处,需要加以归纳、整理和总结.另一方面它反映了一种愿望：建立一套理论，能够对已有的或将要出现的同种类型的对象运用统一的方法去处理. 这些愿望由于早期在数学物理和量子力学等学科中的成功运用而得到有力的支持. 事实证明这些类型通常就是具有代数结构和拓扑结构的集合，而这里的方法则是代数的、几何的、分析的以及不断引入的新方法的综合运用. 几十年来的历史告诉我们，泛函分析在其发展过程中保持了这一特色和风格,它不断地从其他学科领域吸取新鲜材料，通过加工和升华形成带系统性的新的思想和方法，然后应用到更广泛的范围内去解决理论的和应用的问题. 这就无怪乎纯粹数学和应用数学的几乎所有学科都和泛函分析有着广泛的联系. 从微分方程的现代理论、调和分析、随机过程与随机分析学、计算数学、逼近论、规划与优化、控制论、现代物理到计算机科学、生物数学、经济数学等无不渗透着泛函分析的思想与方法. 时至今日，泛函分析已形成内容丰富、方法系统的理论体系，但它仍在蓬勃地发展着，同时也是从事数学理论研究和实际应用的人们不可缺少的一门学科.

对于泛函分析的内容可以作不同形式的分类，如依照所研究的算子是否为线性区分为线性泛函分析与非线性泛函分析，也可以依照基本空间的拓扑性质分为度量空间上的和一般拓扑空间上的泛函分析. 但就实质而言，泛函分析应该包括三部分内容：空间理论、算子理论以及作为二者与其他学科相互联系的应用，三者有机地结合在一起. 本书是为高年级大学生编写的教材，由于讲授时间所限，仅限于讲解度量空间上的和线性的泛函分析. 希望以简短的篇幅叙述这一领域的基本思想和方法，并提供给相关学科基本的工具，以便应用.

我们一开始(第1章)便铺开了度量空间、赋范空间与内积空间的公理体系并讨论它们彼此的联系，介绍了度量空间上的点集拓扑和赋范空间的结构知识. 对于

泛函分析的基本定理(第 2 章), 包括关于有界线性算子和有界线性泛函的主要结论, 我们给出了尽可能广泛的表述形式和尽可能简捷的证明. 较为详细地介绍了 Banach 空间与其一次、二次共轭空间的相互关系以及由此引申出的序列的弱收敛、弱*收敛性质, 对于自反空间和一致凸空间也做了扼要的介绍(第 3 章). 在一般赋范空间的结构之外, 讲述了 Hilbert 空间的几何结构, 即正交基、正交投影、算子与泛函的特殊表现形式(第 4 章). 最后, 第 5 章简要地叙述了有界线性算子的谱的属性, 紧算子、自伴算子的谱论以及谱表示问题. 此外, 书中每章末设有一定数量的习题, 除了通过练习掌握解题方法外, 有些习题还提供了可资参考的例子.

本教材着意加强基础理论的讲解, 在突出基本理论框架的同时有重点地介绍了对于其他学科的应用. 以简短的篇幅叙述这一学科的基本理论并以适当的深度尽力挖掘其中的思想与方法是本书写作的初衷. 书中有重点地选择不动点定理、最佳逼近问题、积分方程、微分方程的适定问题以及 Fourier 分析中的某些问题做了介绍, 从中可以了解泛函分析对于其他学科的应用. 另外本书还引进了几点较为现代的内容, 如关于 Schauder 基、关于一致凸空间的叙述等. 事实上, 这些内容的进一步扩展会带来泛函分析理论的深化和十分广泛的应用. 作者这样做的目的除了强调它们本身的知识内容以外, 还希望引起读者进一步学习和研究的兴趣.

本书是在作者多年授课使用讲义的基础上修订而成的. 此次出版对于书中内容做了新的修正、补充和调整. 在本书撰写和出版过程中, 不少专家、同事曾经提出过宝贵的意见和建议, 尤其是侯友良教授、王茂发博士在使用本教材的过程中都提出过具体的建议, 作者借此机会一并向他们表示衷心的感谢! 对于书中错漏之处, 还望读者给予批评指正.

作　者

2005 年 8 月

符 号 表

$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
Φ	标量域($\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)
$\mathbf{Q}$	有理数域
$\mathbf{N}$	自然数全体
$\varnothing$	空集
$A+B$, $A-B$	集合 A, B 的线性和, 差
$A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$	集合 A, B 的并, 交, 余
$\mathrm{co}E$	集合 E 的凸包
$\mathrm{span}\ E$	由集合 E 张成的线性子空间
$d(x, y)$	x, y 两点之间的距离
$d(x, E)$	x 到集合 E 的距离
$O(x, r)$	以 x 为中心, r 为半径的开球
$S(x, r)$	以 x 为中心, r 为半径的闭球
$S(X)$	空间 X 的闭单位球($=S(\mathrm{o}, 1)$)
$Sp(X)$	空间 X 的单位球面
$\bar{E}$, E°, E'	集合 E 的闭包, 内部, 导出集
T: $X\to Y$	从 X 到 Y 中的映射(算子)
$x\mapsto y$	把 x 点映射为 y 点
$T(A)$, $T^{-1}(B)$	集合 A 的象, 集合 B 的原象
$N(T)$, $R(T)$	算子 T 的零空间, 值空间
$X/\sim$, X/M	X 关于等价关系“~”的商集, 关于 M 的商空间
$B(X,Y)$, $B(X)$	从 X 到 Y 中, 从 X 到 X 中的有界线性算子全体
$C(X,Y)$, $C(X)$	从 X 到 Y 中, 从 X 到 X 中的紧算子全体
X^{*}, X^{**}	空间 X 的一次, 二次共轭空间
X'	X 的代数共轭空间
T^{*}, T^{-1}	算子 T 的共轭算子, 逆算子

$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$	函数 f 在 $[a,b]$ 上的全变差
μ_A	集合 A 的 Minkowski 泛函
$J:X\to X^{**}$	自然嵌入算子
$E^{\perp}$	集合 E 的正交补空间
$\rho(A)$, $\sigma(A)$	算子 A 的正则集，谱集
$\sigma_p(A),\sigma_c(A),\sigma_r(A)$	算子 A 的点谱，连续谱，剩余谱
r_A 或 $r(A)$	算子 A 的谱半径
R_A 或 $R(A)$	算子 A 的数值半径
$\exists$	存在量词
$\forall$	全称量词
$\Rightarrow$	蕴含
$\Leftrightarrow$	等价于

目　　录

第 1 章　线性赋范空间

正如前言中所提到的, 泛函分析的基础建立在集合的两种结构之上, 一种是代数结构即线性结构, 另一种是拓扑 (本书中体现为度量) 结构. 本章将首先介绍线性空间、度量空间、赋范空间、内积空间的公理系统, 讨论它们之间的相互关系; 然后给出某些经典的赋范空间的例子; 在此基础上叙述度量空间的两个重要概念 —— 完备性和紧性, 以及它们的某些应用. 本章提供了全书的基础知识.

1.1　线性空间与度量空间

我们以 Φ 代表标量域, 即实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$.

定义 1.1.1　设 X 是某个集合, 其中规定了两种运算 (“加法” 与 “数乘”), 使得

(1) X 关于加法构成交换群: $\forall x, y \in X$, 存在 $u \in X$, 称 u 为 x 与 y 之和, 记为 $u = x + y$, 满足 $\forall\, x, y, z \in X$,

① $x + y = y + x$.

② $x + (y + z) = (x + y) + z$.

③ 存在 $0 \in X$, 使得 $\forall\, x \in X$, $x + 0 = x$.

④ 对于每个 $x \in X$, 存在 $x' \in X$ 使得 $x + x' = 0$. 记 $x' = -x$, 称 x' 是 x 的负元.

(2) 数乘运算可行: $\forall x \in X$, $\alpha \in \Phi$, 存在 $v \in X$, 称 v 为 α 与 x 的积, 记为 $v = \alpha x$, 满足 $\forall\, x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

① $1x = x$.

② $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

③ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

则称 X 是线性空间或向量空间, 其中的元素称为向量.

当 $\Phi = \mathbf{R}$ 时, 称 X 是实线性空间.

当 $\Phi = \mathbf{C}$ 时, 称 X 是复线性空间.

线性空间的子集合 E, 若对于同样的标量域构成线性空间, 则称 E 是 X 的线

性子空间. 显然 E 是 X 的线性子空间当且仅当

$$\alpha x+\beta y\in E,\quad \forall x,y\in E,\quad \alpha,\beta\in\Phi.$$

我们采用以下记号: 当 $x\in X$, E_1, $E_2\subset X$, $\alpha\in\Phi$ 时,

$$x+E_1=\{x+x_1:x_1\in E_1\},$$

$$\alpha E_1=\{\alpha x_1:x_1\in E_1\},$$

$$E_1+E_2=\{x_1+x_2:x_1\in E_1,x_2\in E_2\}.$$

称 αE 是 E 的倍集, E_1+E_2 是 E_1, E_2 的 (线性) 和集.

注意 应该把线性空间的子集之间的这些运算与集合论中的 "并" 与 "交" 运算区别开来. 就运算性质来说, 一般地, 当 $E\subset X$ 时, $2E\subset E+E$, 其中的包含关系可能是严格的. 此外, $\forall\, E\subset X$, $-E$ 有明确的意义; 若 $E\neq\varnothing$, 则 $E-E\neq\varnothing$ 等.

线性空间 X 中的元素 $x_1,\cdots,x_n$ 称为线性无关, 若 $\forall\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\Phi$, 当

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=0$$

时, $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$. X 的子集合 E 称为线性无关集, 若 E 中任意有限多个元素都线性无关. 不是线性无关的集合称为线性相关. 若 E 线性无关并且 $\forall x\in X$, 存在有限多个 $x_1,\cdots,x_n\in X$ 和 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\Phi$ 使得

$$x=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n,$$

则称 E 是 X 的基底 —— Hamel 基. 此时若 E 仅由 n 个元素组成, 则称 X 是 n 维空间, 记为 $\dim X=n$. 若 E 由无穷多个元素构成, 则称 X 为无穷维空间, 记为 $\dim X=\infty$. 当 $X=\{0\}$ 时, 记为 $\dim X=0$.

例 1.1.1 空间 Φ^n.

其中的每个元素是一个 n 数组 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $x_i\in\Phi$, $1\leqslant i\leqslant n$. 定义坐标式的加法和数乘

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$

$$a(x_1,\cdots,x_n)=(ax_1,\cdots,ax_n)\qquad(a\in\Phi).$$

这些 n 数组的全体构成线性空间, 其维数为 n, 即 $\dim X=n$.

例 1.1.2 无穷序列空间 Φ^∞.

其中的每个元素是一个无穷序列 $x=(x_1,x_2,\cdots)$, $x_n\in\Phi$, $n\geqslant 1$, 类似地定义

$$(x_1,x_2,\cdots)+(y_1,y_2,\cdots)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots),$$

$$a(x_1,x_2,\cdots)=(ax_1,ax_2,\cdots)\qquad(a\in\Phi).$$

则无穷序列空间是线性空间, 其维数是无穷的, 即 $\dim X=\infty$.

例 1.1.3 函数空间.

设 Ω 是任一点集, X 是在 Ω 上定义的函数全体, 规定点态的加法和数乘, 即 $f=f(t)$, $g=g(t)$ 时,

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),$$

$$(af)(t)=af(t),\quad \forall t\in\Omega\quad(a\in\Phi).$$

容易验证 X 也是线性空间.

今后对于有限维空间、无穷序列空间和函数空间将分别采用上面规定的线性运算. 在经典分析、线性代数、复变函数、实变函数、微分方程中遇到的许多空间都是线性空间.

利用 Zorn 引理可以证明 (见本书附录), 任一非零线性空间 (即 $X\neq\{0\}$) 必存在极大线性无关集合, 这一集合即是 X 的 Hamel 基. 换句话说, 任一非零线性空间必存在 Hamel 基.

凸集和子空间是线性空间中时常用到的子集. X 的子集 E 称为是凸的, 若 $\forall x,y\in E$, $0\leqslant r\leqslant 1$, $rx+(1-r)y\in E$. 对于任一集合 $E\subset X$, 记

$$\operatorname{co}E=\left\{\sum_{i=1}^{n}r_ix_i: x_i\in E,\sum_{i=1}^{n}r_i=1,\ r_i\geqslant 0,\ n\geqslant 1\right\},\tag{1.1.1}$$

称 $\operatorname{co}E$ 是 E 的凸包或凸壳, 其中形如 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_ix_i$ 的元素称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的凸组合. 记

$$\operatorname{span}E=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i: x_i\in E, a_i\in\Phi, n\geqslant 1\right\},\tag{1.1.2}$$

称 $\operatorname{span}E$ 是由 E 张成的线性子空间, 其中形如 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ 的元素称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合.

命题 1.1.1 设 X 是线性空间, $E\subset X$.

(1) $\operatorname{co}E$ 是 X 中的凸集, 它是 X 中包含 E 的所有凸集的交集.

(2) span E 是 X 的线性子空间, 它是 X 中包含 E 的所有线性子空间的交集.

证明　这里仅证 (1). 类似地可以证明 (2).

(1) co E 是凸集. 实际上 $\forall x,\ y \in \operatorname{co} E$, 不妨设

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \qquad y = \sum_{j=1}^{m} s_j y_j,$$

其中 $x_i, y_j \in E$, $r_i \geqslant 0$, $s_j \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, $\sum_{j=1}^{m} s_j = 1$. $\forall r$, $0 \leqslant r \leqslant 1$,

$$rx + (1-r)y = \sum_{i=1}^{n} r r_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-r) s_j y_j.$$

由于 $\sum_{i=1}^{n} r r_i + \sum_{j=1}^{m} (1-r) s_j = r + (1-r) = 1$, 上式是 x_i, y_j 的凸组合, 由 co E 的定义知 $rx + (1-r)y \in \operatorname{co} E$. 故 co E 是凸集.

(2) 对于任一凸集 A, A 中任意 n 个元素的凸组合仍在 A 中.

应用数学归纳法, 当 $n = 2$ 时, 只要 $x_1, x_2 \in A$, $r_1 + r_2 = 1$, $r_i > 0$, 则 $r_1 x_1 + r_2 x_2 \in A$, 这由定义直接得出. 设 $n = k$ 时结论成立, 我们证明 $n = k+1$时也成立. 实际上若 $x_1, \cdots, x_k, x_{k+1} \in A$, $r_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k+1} r_i = 1$, 注意 $\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i}{1 - r_{k+1}} = 1$, 由归纳假设 $x = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i x_i}{1 - r_{k+1}} \in A$, 从而

$$(1 - r_{k+1}) x + r_{k+1} x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} r_i x_i \in A.$$

(3) 设 $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是包含 E 的全体凸集, 由 $E \subset E_\lambda$, 显然 $\operatorname{co} E \subset \operatorname{co} E_\lambda$. 由 (2), $\operatorname{co} E_\lambda = E_\lambda$, 从而 $\operatorname{co} E \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. 另一方面由 (1), co E 是包含 E 的凸集, 从而对于某个 $\lambda_0 \in \Lambda$, $\operatorname{co} E = E_{\lambda_0}$, 于是

$$\operatorname{co} E = E_{\lambda_0} \supset E_{\lambda_0} \bigcap \left(\bigcap_{\lambda \neq \lambda_0} E_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda.$$

总之, $\operatorname{co} E = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$.

定义 1.1.2　设 X 是某个集合, $d : X \times X \to \mathbf{R}$ 是一个映射, 满足

(1) $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$.

(3) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ (三角不等式).

则称 d 是 X 上的度量 (距离) 函数, 称 X 为度量 (距离) 空间, 称 $d(x,y)$ 是 x 与 y 之间的距离. 有时为了明确, 记为 (X,d).

度量空间的子集合 E, 仍以 d 为 E 上度量构成的度量空间称为 (X,d) 的子空间.

例 1.1.4 对于 n 维空间 Φ^n 中的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.3}$$

容易验证 d 是 Φ^n 上的度量函数. 其中的三角不等式即多元微积分中用到的不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

记此空间为 (Φ^n,d), 称之为 n 维欧氏 (Euclid) 空间.

实际上在 Φ^n 上还可以定义其他度量, 例如:

$$d'(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|.$$

此时 (Φ^n,d') 仍是度量空间. 但须注意应把 (Φ^n,d') 与 (Φ^n,d) 视为不同的度量空间.

例 1.1.5 空间 s.

考虑例 1.1.2 中的线性空间 Φ^∞, 对于 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, 定义

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}. \tag{1.1.4}$$

现证明 d 是 Φ^∞ 上的度量函数, 记此空间为 s.

证明 注意 (1.1.4) 中的级数总是收敛的, 所以 $d(x,y)$ 是有限实数.

现在, (1) 显然 $d(x,y)\geqslant 0$. 若 $d(x,y)=0$, 则必有 $|x_i-y_i|=0$, 即 $x_i=y_i$ $(i\geqslant 1)$, 故 $x=y$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$ 显然.

(3) 考虑函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$, $t\geqslant 0$. 由于 $f(t)$ 的递增性, 对于任意实数 a, b, 由 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i + y_i - z_i|}{1+|x_i - y_i + y_i - z_i|} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left(\frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1+|y_i - z_i|} \right) \\
&= d(x,y) + d(y,z).
\end{aligned}
$$

例 1.1.6　空间 $C[a,b]$.

$C[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上定义的连续函数全体, 对于 $x, y \in C[a,b]$, 规定

$$
d(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|. \tag{1.1.5}
$$

则 d 是 $C[a,b]$ 上的度量函数. 实际上容易验证

(1) $d(x,y) \geqslant 0$. 若 $d(x,y) = 0$, 则 $x(t) = y(t)$, $\forall t \in [a,b]$, 故 $x = y$.

(2) 显然 $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $\forall x, y, z \in C[a,b]$,

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - z(t)| \\
&\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|\} \\
&\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t) - z(t)| \\
&= d(x,y) + d(y,z).
\end{aligned}
$$

所以 $C[a,b]$ 是度量空间.

定义 1.1.3　设 (X,d) 是度量空间.

(1) 若 $x_n, x \in X$, 称 x_n 依度量收敛于 x, 若 $d(x_n, x) \to 0 (n \to \infty)$, 记之为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ 或 $x_n \to x$.

(2) 若 $E \subset X$ 是一子集合, 称 $\operatorname{diam} E = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}$ 是 E 的直径. 称 E 是有界集, 若 $\operatorname{diam} E < \infty$.

定理 1.1.1　度量空间中序列的极限是唯一的, 收敛序列的元素构成有界集.

证明　若 $x_n \to x$, $x_n \to y$, 即

$$
d(x_n, x) \to 0, \qquad d(x_n, y) \to 0.
$$

由三角不等式知

$$0 \leqslant d(x,y) \leqslant d(x_n,x) + d(x_n,y) \to 0.$$

故 $d(x,y)=0$, 由定义知 $x=y$.

当 $d(x_n,x)\to 0$ 时, $d(x_m,x_n)\leqslant d(x_m,x)+d(x_n,x)\to 0(m,n\to\infty)$, 由此得出后一结论.

定理 1.1.2 $d(x,y)$ 是两个变元的连续函数, 即当 $x_n\to x$, $y_n\to y$ 时,

$$d(x_n,y_n)\to d(x,y). \tag{1.1.6}$$

证明 由三角不等式知道,

$$d(x,z)-d(x,y)\leqslant d(y,z).$$

同样地

$$d(x,y)-d(x,z)\leqslant d(z,y)=d(y,z),$$

于是

$$|d(x,y)-d(x,z)|\leqslant d(y,z). \tag{1.1.7}$$

应用 (1.1.7) 又得到

$$\begin{aligned}|d(x_n,y_n)-d(x,y)| &\leqslant |d(x_n,y_n)-d(y_n,x)|+|d(y_n,x)-d(x,y)|\\ &\leqslant d(x_n,x)+d(y_n,y)\to 0,\end{aligned}$$

从而

$$d(x_n,y_n)\to d(x,y).$$

例 1.1.7 设 X 是任一点集, 定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y,\end{cases}\quad \forall x,y\in X.$$

容易验证 (X,d) 是度量空间. 称此空间是离散度量空间.

此例说明对于任一点集 X, 总可以在 X 上规定某种度量使之成为度量空间. 但是我们研究度量空间的目的在于研究空间的性质并用于解决实际问题, 因此我们通常所关心的是与空间的某种性质紧密联系的度量函数. 下面是这方面的例子.

命题 1.1.2 $C[a,b]$ 中的序列依度量收敛等价于在 $[a,b]$ 上一致收敛.

这由 $C[a,b]$ 中度量函数的定义直接得出.

例 1.1.8　空间 S.

设 (Ω,Σ,μ) 是测度空间, $\mu(\Omega)<\infty$, 关于 Σ 可测的函数全体记为 S. 定义

$$d(x,y)=\int_\Omega \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}\mu,\qquad \forall x,y\in S, \tag{1.1.8}$$

将 S 中关于 μ 几乎处处相等的函数视为同一元. 由定义直接验证知道 (S,d) 是度量空间.

命题 1.1.3　S 中的函数序列依度量收敛等价于依测度收敛.

证明　若 $x_n,x\in S$, x_n 依测度收敛于 x, $\forall\sigma>0$, 记 $E_n(\sigma)=\{t:|x_n(t)-x(t)|\geqslant\sigma\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n(\sigma))=0$. 由于

$$\begin{aligned}d(x_n,x)&=\int_{E_n(\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}\mu+\int_{\Omega\setminus E_n(\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\mu(E_n(\sigma))+\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(\Omega),\end{aligned}$$

对于事先给定的 $\varepsilon>0$, 先取 σ 足够小使第二项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$, 再取 n 足够大使第一项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$, 则知 $d(x_n,x)\to 0$.

反之, $\forall\sigma>0$, 由于

$$\frac{\sigma}{1+\sigma}\mu(E_n(\sigma))\leqslant\int_{E_n(\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\mathrm{d}\mu\leqslant d(x_n,x),$$

所以当 $d(x_n,x)\to 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n(\sigma))=0$, 这说明 x_n 依测度收敛于 x.

此外, 例 1.1.5 的空间 s 中的序列依度量收敛等价于依坐标收敛. 读者可自行验证.

一个线性空间上未必定义有度量, 反过来一个度量空间也未必是线性的. 同时是线性又是度量的空间 X 称为线性度量空间, 假若加法和数乘关于此度量是连续的. 即当在 X 中, $x_n\to x$, $y_n\to y$, 在标量域 Φ 中 $\lambda_n\to\lambda$ 时必有

$$x_n+y_n\to x+y,\qquad \lambda_n x_n\to\lambda x.$$

定义 1.1.4　设 (X,d) 是度量空间.

(1) 若 $x_0\in X$, $r>0$, 称集合 $O(x_0,r)=\{x\in X:\ d(x,x_0)<r\}$ 和 $S(x_0,r)=\{x\in X:\ d(x,x_0)\leqslant r\}$ 分别是以 x_0 为中心 r 为半径的球和闭球.

(2) 称集合 $B\subset X$ 是开集, 若 $\forall x\in B$, 存在 $r>0$, 使得 $O(x,r)\subset B$.

(3) 包含 x 的任一开集都称为 x 的邻域.

(4) 集合 $E \subset X$ 称为闭集, 若 $X \backslash E$ 是开集.

命题 1.1.4 $\forall x_0 \in X, r > 0$, 球 $O(x_0, r)$ 是开集, $S(x_0, r)$ 是闭集.

证明 $\forall y \in O(x_0, r)$, 取 $r' = r - d(y, x_0)$, 则 $r' > 0$. 此时 $\forall z \in O(y, r')$,

$$d(z, x_0) \leqslant d(z, y) + d(y, x_0) < r' + d(y, x_0) = r,$$

故 $z \in O(x_0, r)$. z 是任意的, 所以 $O(y, r') \subset O(x_0, r)$. 由定义知道 $O(x_0, r)$ 是开集.

另一方面, $\forall y \overline{\in} S(x_0, r)$, 则 $d(y, x_0) > r$; 取 $r' = d(y, x_0) - r$, 则 $r' > 0$, 此时 $\forall z \in O(y, r')$,

$$d(z, x_0) \geqslant d(y, x_0) - d(z, y) > r,$$

所以 $O(y, r') \bigcap S(x_0, r) = \varnothing$, 故 $X \backslash S(x_0, r)$ 是开集, $S(x_0, r)$ 是闭集.

下面定理可以仿照实数轴上的情况证明之, 这里将具体的证明略去.

定理 1.1.3 设 X 是度量空间, 则

(1) 空集 $\varnothing$ 与 X 是开集;

(2) 任意多个开集之并是开集;

(3) 有限个开集之交是开集.

设 $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是集合 X 的子集族, 若空集 $\varnothing$ 与 X 属于该集族, 并且该集族中的集合对于任意并和有限交封闭, 则称 $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 上的拓扑, 称 X 是拓扑空间. 定理 1.1.3 的结论表明度量空间中由全体开集构成的集族是它的拓扑, 从而每个度量空间是一个拓扑空间.

定义 1.1.5 设 X 是度量空间, $E \subset X$, $x_0 \in X$.

(1) 若存在 $r > 0$ 使得 $O(x_0, r) \subset E$, 称 x_0 是 E 的内点. E 的内点全体称为 E 的内部, 记为 E°.

(2) 若存在 $r > 0$ 使得 $O(x_0, r) \bigcap E = \varnothing$, 称 x_0 是 E 的外点, E 的外点全体记为 E^e.

(3) 若 $\forall \varepsilon > 0$, $O(x_0, \varepsilon) \bigcap E \neq \varnothing$, 称 x_0 是 E 的接触点. E 的接触点全体称为 E 的闭包, 记为 $\overline{E}$.

(4) 若 $\forall \varepsilon > 0$, $(O(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \bigcap E \neq \varnothing$, 称 x_0 是 E 的聚点. E 的聚点全体称为 E 的导出集, 记为 E'.

下面命题容易由定义直接验证, 这里将具体的验证留给读者.

命题 1.1.5 (1) $\overline{E} \bigcup E^e = X$, $\overline{E} \bigcap E^e = \varnothing$, $\overline{E} = E \bigcup E'$.

(2) $x_0 \in \overline{E}$ 当且仅当存在 $x_n \in E$, $x_n \to x_0$.

(3) $x_0 \in E'$ 当且仅当存在 $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$ 使得 $x_n \to x_0$.

定理 1.1.4　设 X 是度量空间, $E \subset X$.

(1) E 是开集当且仅当 $E = E^\circ$, E° 是包含在 E 中的最大开集.

(2) E 是闭集当且仅当 $E = \overline{E}$, $\overline{E}$ 是包含 E 的最小闭集.

(3) E 是闭集当且仅当 $\forall x_n \in E$, $x_n \to x_0$, 则 $x_0 \in E$.

证明　(1) 若 E 是开集, 则 $\forall x_0 \in E$, 存在 $r > 0$, 使得 $O(x_0, r) \subset E$, 从而 $x_0 \in E^\circ$, 故 $E \subset E^\circ$. 但显然地 $E^\circ \subset E$, 所以 $E = E^\circ$.

反之, 若 $E = E^\circ$, 只须证明 E° 是开集. $\forall x_0 \in E^\circ$, x_0 是 E 的内点, 故存在 $r > 0$, $O(x_0, r) \subset E$. 由 $O(x_0, r)$ 是开集, 故其中每一点 $z \in O(x_0, r)$ 是 $O(x_0, r)$ 的内点, 从而是 E 的内点, 即 $O(x_0, r) \subset E^\circ$. E° 是开集.

若 G 是开集, $G \subset E$, 显然 $G^\circ \subset E^\circ$, 由以上所证 $G = G^\circ \subset E^\circ$.

(2) $\forall E \subset X$, 由定义, E 的外点等于 E 的余集的内点, 即 $(X \backslash E)^\circ = X \backslash \overline{E}$. 若 E 闭, 则 $X \backslash E$ 开, 由 (1) 知道 $X \backslash E = (X \backslash \overline{E})^\circ = X \backslash \overline{E}$, 从而 $E = \overline{E}$.

反之, 若 $E = \overline{E}$, 则 $X \backslash E = X \backslash \overline{E} = (X \backslash E)^\circ$ 是开集, 从而 E 是闭集.

(3) 定理中的 (3) 由 (2) 和命题 1.1.5(3) 得出.

现在让我们转到比度量空间更为特殊的一类空间.

定义 1.1.6　设 X 是线性空间, 若映射 $p: X \to \mathbf{R}$ 满足

(1) $p(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in X$.

(2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\forall\, x \in X$, $\alpha \in \varPhi$.

(3) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, $\forall\, x, y \in X$.

则称 p 是 X 上的半范数. 若此外还有

(4) $p(x) = 0$ 时 $x = 0$,

则称 p 是 X 上的范数, 此时记 $p(x) = \|x\|$, 称 $(X, \|\cdot\|)$ 是线性赋范空间. 在不至于混淆时记为 X.

定理 1.1.5　(1) 每个线性赋范空间 X 都是度量空间, 并且

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{1.1.9}$$

是 X 上的度量函数.

(2) 范数关于变元 x 是连续函数, 即若 $x_n \to x$, 则

$$\|x_n\| \to \|x\|. \tag{1.1.10}$$

(3) 若 x_n, y_n, x, $y \in X$, $\lambda_n, \lambda \in \varPhi$ 并且 $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\lambda_n \to \lambda$, 则

$$x_n + y_n \to x + y, \qquad \lambda_n x_n \to \lambda x. \tag{1.1.11}$$

证明 (1) (1.1.9) 由直接验证得出.

(2) 在定义 1.1.6(2) 中, 令 $\alpha=-1$ 得出 $||-x|| = ||x||$. 再由定义 1.1.6(3) 的不等式得出

$$||x_n|| \leqslant ||x|| + ||x_n - x||,$$

或者

$$||x_n|| - ||x|| \leqslant ||x_n - x||.$$

同样地

$$||x|| - ||x_n|| \leqslant ||x - x_n|| = ||x_n - x||,$$

从而

$$\Big|||x_n|| - ||x||\Big| \leqslant ||x_n - x||. \tag{1.1.12}$$

若 $x_n \to x$, 即 $||x_n - x|| \to 0$, 故有 $||x_n|| \to ||x||$.

(3) 若 $x_n \to x$, $y_n \to y$, 则

$$||(x_n + y_n) - (x + y)|| \leqslant ||x_n - x|| + ||y_n - y|| \to 0,$$

即 $x_n + y_n \to x + y$.

为证最后的式子成立, 注意收敛数列 λ_n 是有界的. 不妨设 $|\lambda_n| \leqslant M$, 故有

$$\begin{aligned}||\lambda_n x_n - \lambda x|| &\leqslant ||\lambda_n x_n - \lambda_n x|| + ||\lambda_n x - \lambda x||\\&\leqslant |\lambda_n|\,||x_n - x|| + |\lambda_n - \lambda|\,||x||\\&\leqslant M||x_n - x|| + |\lambda_n - \lambda|\,||x||,\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时后面两项都趋于 0, 故知结论成立.

设 $(X, ||\cdot||)$ 是线性赋范空间, 以 $d(x,y) = ||x-y||$ 定义的 X 上的度量称为是由范数 $||\cdot||$ 诱导的度量. 今后当说到一个赋范空间的度量时, 总是指由它的范数诱导的度量. 容易知道, 此时 $x_n \to x$ 当且仅当 $||x_n - x|| \to 0$. 称这种收敛是依范数收敛. 此外集合 $E \subset X$ 有界当且仅当

$$\sup\{||x|| : x \in E\} < \infty.$$

定理 1.1.6 设 X 是线性空间, 则 X 上的度量 d 是由某个范数诱导的当且仅当 d 满足

(1) $d(\alpha x, 0) = |\alpha|\ d(x,0), \quad \forall x \in X, \quad \alpha \in \varPhi$.

(2) $d(x+z,y+z)=d(x,y), \quad \forall x,y,z\in X$.

(2) 表明 d 是平移不变的.

证明　若 X 是线性赋范空间, $\|\cdot\|$ 是其范数, $d(x,y)=\|x-y\|$, 由范数的性质可知

$$d(\alpha x,0)=\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|=|\alpha|\ d(x,0),$$

$$d(x+z,y+z)=\|(x+z)-(y+z)\|=\|x-y\|=d(x,y).$$

反之, 若 d 满足条件 (1), (2), 定义 $\|x\|=d(x,0)$, 则

(1) 显然 $\|x\|\geqslant 0$. 若 $\|x\|=0$, 即 $d(x,0)=0$, 由度量函数的性质, $x=0$.

(2) 由 (1), $\|\alpha x\|=d(\alpha x,0)=|\alpha|\,d(x,0)=|\alpha|\,\|x\|$.

(3) 由 (2),

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=d(x+y,0)=d(x,-y)\\&\leqslant d(x,0)+d(0,-y)\\&=d(x,0)+d(y,0)=\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

故 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数, X 是线性赋范空间.

例 1.1.6′　考虑例 1.1.6 中的度量空间 $C[a,b]$. 对于其中每个 x, 定义

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|. \tag{1.1.13}$$

按照函数空间的加法与数乘, $C[a,b]$ 是线性空间. 直接验证表明 $C[a,b]$ 是赋范空间.

此例也可用定理 1.1.6 的判定条件来验证. 同样地, 例 1.1.4 的欧氏空间也是赋范空间. 注意例 1.1.3 中的 s 和例 1.1.5 中的 S 都不是线性赋范空间. 例如, 对于 s, 取 $x=(1,0,\cdots)$, 若 $\alpha\neq 0,\pm1$, 则

$$d(\alpha x,0)=\frac{|\alpha|}{2(1+|\alpha|)}\neq\frac{1}{4}|\alpha|=|\alpha|\,d(x,0).$$

由定理 1.1.6, s 不是线性赋范空间.

比线性赋范空间更为特殊的一类空间是内积空间.

定义 1.1.7　设 X 是线性空间, 若 $\forall x,y\in X$ 对应有标量 (x,y), 满足

(1) $(y,x)=\overline{(x,y)}$, $\forall x,y\in X$.

(2) $(\alpha x,y)=\alpha\,(x,y)$, $\forall x,y\in X$, $\alpha\in\Phi$.

(3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$, $\forall x,y,z\in X$.

(4) $\forall x\in X$, $(x,x)\geqslant 0$. $(x,x)=0$ 时 $x=0$.

则称 (x,y) 是 x, y 的内积, 称 X 是内积空间.

注意 若 X 是内积空间, 则 $\forall x,y,z\in X$, $\alpha,\beta\in\Phi$, 容易得到

(1) $(0,y)=(x,0)=0$.

(2) $(x,\alpha y)=\overline{(\alpha y,x)}=\overline{\alpha(y,x)}=\overline{\alpha}(x,y)$.

(3) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$.

(4) $(x,\alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z)$.

若标量域是 $\mathbf{R}$, 则 (2), (4) 中的共轭可以不出现.

定理 1.1.7 在内积空间 X 中, 若规定 $||x||=\sqrt{(x,x)}$, 则

(1) $|(x,y)|\leqslant ||x||\,||y||$, $\forall x,y\in X$.

(2) $||\cdot||$ 是 X 上的范数, $(X,||\cdot||)$ 是线性赋范空间.

证明 (1) 当 $x=0$ 或 $y=0$ 时, (1) 中等式自然成立. 现在设 $y\neq 0$, $\forall\lambda\in\Phi$, 根据公理中列举的性质实际计算得

$$0\leqslant (x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+2\mathrm{Re}\overline{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y).$$

取 $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$, 代入得

$$0\leqslant (x,y)-2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}=\frac{1}{(y,y)}((x,x)(y,y)-|(x,y)|^2),$$

从而

$$|(x,y)|\leqslant\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}=||x||\,||y||.$$

(2) 由定义 1.1.7(4) 知 $||x||\geqslant 0$. 若 $||x||=0$, 即 $(x,x)=0$, 从而 $x=0$. 又由定义 1.1.7(2),

$$||\alpha x||=\sqrt{(\alpha x,\alpha x)}=\sqrt{|\alpha|^2(x,x)}=|\alpha|||x||.$$

(3) 由上面 (1) 的证明知

$$\begin{aligned}||x+y||^2&=(x+y,x+y)\\&=(x,x)+2\mathrm{Re}(x,y)+(y,y)\\&\leqslant (x,x)+2|(x,y)|+(y,y)\\&\leqslant ||x||^2+2||x||\,||y||+||y||^2\\&=(||x||+||y||)^2.\end{aligned}$$

所以 $||x+y||\leqslant ||x||+||y||$, $||\cdot||$ 是 X 上的范数.

定理 1.1.7 说明任一内积空间是线性赋范空间. 以 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 定义的 X 上的范数称为由内积诱导的范数. 不难验证内积 (x,y) 关于两变元是连续的. 即若 $x_n \to x$, $y_n \to y$, 则 $(x_n, y_n) \to (x,y)$.

定理 1.1.8　赋范空间 X 的范数 $\|\cdot\|$ 是由内积诱导的当且仅当平行四边形公式成立, 即

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \qquad \forall x, y \in X. \tag{1.1.14}$$

证明　必要性. 若 $\|\cdot\|$ 是由内积 $(\cdot\,,\,\cdot)$ 诱导的, $x, y \in X$, 则

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y),$$

$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y),$$

相加即得 (1.1.14).

为了证明充分性, 只需证明当平行四边形公式成立时,

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2) \tag{1.1.15}$$

和

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \tag{1.1.16}$$

是当标量域 $\Phi = \mathbf{C}$ 和 $\Phi = \mathbf{R}$ 时 X 上的内积并且由它们诱导的范数正好是 $\|\cdot\|$. 这两个等式分别被称为复空间和实空间上的极化恒等式. 可以用与解函数方程类似的方法证明这一结论. 今后我们还将会用到这些恒等式, 这里不准备叙述其证明了.

1.2　线性赋范空间的例

在 1.1 节中我们已经举出过一些线性赋范空间的例子. 在泛函分析中有一些很早以前就受到人们重视并且被事实证明是十分重要的空间, 如 L^p, $l^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 等, 这里将扼要加以介绍. 在实变函数论中, 我们还接触过有界变差函数类、绝对连续函数类、满足 Lipschitz 条件的函数类以及有号测度类等. 这些函数或测度类可以应用适当方式使之成为赋范空间. 此外我们还将介绍一些在其他学科中用到的空间.

例 1.2.1　空间 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$.

设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, $\mu(\Omega)$ 有限或无穷. $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ 是使得 $\int_\Omega |f(t)|^p \mathrm{d}\mu < \infty$ 的可测函数全体, 将 a.e. 相等的函数视为同一元. 若 $\Omega = [a,b]$, 则记 $L^p(\Omega, \Sigma, \mu) = L^p[a,b]$. 通常简记 $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ 为 L^p.

(1) L^p 是线性空间. 实际上若 $f,g\in L^p$, 即

$$\int_\Omega |f(t)|^p \mathrm{d}\mu < \infty, \qquad \int_\Omega |g(t)|^p \mathrm{d}\mu < \infty,$$

则对于几乎所有的 $t\in\Omega$,

$$|f(t)+g(t)|^p \leqslant (2\max\{|f(t)|,\ |g(t)|\})^p \leqslant 2^p(|f(t)|^p+|g(t)|^p),$$

于是

$$\int_\Omega |f(t)+g(t)|^p \mathrm{d}\mu \leqslant 2^p\left(\int_\Omega |f(t)|^p\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g(t)|^p\mathrm{d}\mu\right) < \infty,$$

即 $f+g\in L^p$. 此外, 显然 $\alpha f\in L^p$, 故 L^p 是线性空间.

(2) 设 $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$(称 p, q 是一对共轭数), 若 $f\in L^p$, $g\in L^q$, 我们证明 Hölder 不等式成立, 即

$$\int_\Omega |f(t)g(t)|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(t)|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.2.1}$$

我们从 Young 不等式开始, 设 a, $b>0$, 明显地 (见图 1.1)

$$ab \leqslant A+B = \int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x + \int_0^b y^{q-1}\mathrm{d}y = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1.2.2}$$

设

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(t)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} > 0, \qquad ||g||_q = \left(\int_\Omega |g(t)|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} > 0.$$

在 $||f||_p$ 与 $||g||_q$ 至少一个为 0 的情况下, Hölder 不等式的成立是显然的. 现在做函数

$$a(t)=\frac{f(t)}{||f||_p}, \qquad b(t)=\frac{g(t)}{||g||_q},$$

利用 Young 不等式可以得到

$$|a(t)b(t)| \leqslant \frac{|a(t)|^p}{p}+\frac{|b(t)|^q}{q},$$

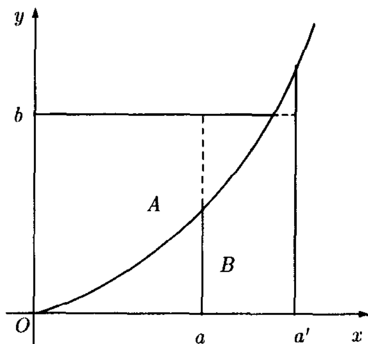


图 1.1

从而

$$\begin{aligned}\int_\Omega |a(t)b(t)|\mathrm{d}\mu &\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |a(t)|^p\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\int_\Omega |b(t)|^q\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p}\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\int_\Omega \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

换回到函数 f, g, 则知 (1.2.1) 成立.

(3) 设 $p\geqslant 1$, $f,g\in L^p$, 则有 Minkowski 不等式成立, 即

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.2.3}$$

实际上当 $p=1$ 时,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_1 &= \int_\Omega |f(t)+g(t)|\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_\Omega |f(t)|\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g(t)|\mathrm{d}\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.\end{aligned}$$

设 $p>1$, 当 $f,g\in L^p$ 时, $f+g\in L^p$, 此时 $|f+g|^{\frac{p}{q}}\in L^q$. 于是由 Hölder 不等式

$$\int_\Omega |f|\,|f+g|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p\,\|\,|f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q,$$

$$\int_\Omega |g|\,|f+g|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_p\,\|\,|f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega |f+g|\,|f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_\Omega |f|\,|f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g|\,|f+g|^{p-1}\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega |f|\,|f+g|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g|\,|f+g|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \|f\|_p\,\|\,|f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q + \|g\|_p\,\|\,|f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int_\Omega |f+g|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

由此得出

$$\|f+g\|_p = \left(\int_\Omega |f+g|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(4) 当 $p\geqslant 1$ 时, 以 $\|f\|_p$ 为范数并且将 a.e. 相等的函数视为同一元, 则 L^p 成为线性赋范空间.

实际上, $\|f\|_p \geqslant 0$. 若 $\|f\|_p = 0$, 则 $f(t) = 0$, a.e., 即 $f = 0$. 显然 $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p$ 成立. 再由 (3) 三角不等式成立.

(5) 当 $p = 2$ 时, 定义

$$(f,g) = \int_{\Omega} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}\mu, \qquad \forall f,g \in L^2, \tag{1.2.4}$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 是 L^2 上的内积, 此时 L^2 成为内积空间. 这可以按定义直接验证.

值得注意的是 Minkowski 不等式中等号成立的条件. 不妨设 f, g 均不为 0 元, 由于 Young 不等式中等号成立当且仅当 $b = \varphi(a)$, 故 Hölder 不等式中等号成立当且仅当 $|g(t)| = k|f(t)|^{\frac{p}{q}}$, a.e., 其中 $k > 0$ 为常数. 在证明 Minkowski 不等式时用到函数 $|f|$ 与 $|f+g|^{\frac{p}{q}}$ 以及 $|g|$ 与 $|f+g|^{\frac{p}{q}}$, 故等号成立当且仅当 $|f+g|^{\frac{p}{q}} = k_1|f|^{\frac{p}{q}}$, $|f+g|^{\frac{p}{q}} = k_2|g|^{\frac{p}{q}}$, a.e.. 此时必有 $f(t) = cg(t)$, a.e., 其中 c 是非负常数.

例 1.2.2 空间 L^{∞}.

仍设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, 记 $L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$ 是在 Ω 上与一个有界可测函数几乎处处相等的函数全体, 称此种函数为本性有界可测函数. 若 $\Omega = [a,b]$, 则记 $L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu) = L^{\infty}[a,b]$. 通常简记 $L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$ 为 L^{∞}.

(1) L^{∞} 是线性空间. 例如, 若 f 在 $\Omega\backslash E_1$ 上有界, g 在 $\Omega\backslash E_2$ 上有界, $\mu(E_1) = \mu(E_2) = 0$, 则 αf 与 $f+g$ 分别在 $\Omega\backslash E_1$ 与 $\Omega\backslash(E_1 \bigcup E_2)$ 上有界. $\mu(E_1 \bigcup E_2) = 0$, 故 $\alpha f, f+g \in L^{\infty}$.

(2) 定义

$$\|f\|_{\infty} = \inf_{E\subset\Omega,\mu(E)=0}\ \sup_{t\in\Omega\backslash E} |f(t)|, \qquad \forall f \in L^{\infty}, \tag{1.2.5}$$

称 $\|f\|_{\infty}$ 为 f 的本性最大模或本性上确界. 有时记

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega} |f(t)|. \tag{1.2.6}$$

我们证明, 将 Ω 上 a.e. 相等的函数视为同一元, 则 $\|\cdot\|_{\infty}$ 是 L^{∞} 上的范数.

实际上, $\forall f \in L^{\infty}$, 存在 $E_0 \subset \Omega$, $\mu(E_0) = 0$ 使得 $\|f\|_{\infty} = \sup\limits_{t\in\Omega\backslash E_0} |f(t)|$. 换句话说, $\|f\|_{\infty}$ 可以在某个与 Ω 几乎处处相等的集合上达到. 为此, 取 $E_n \subset \Omega$, $\mu(E_n) = 0$, 使得

$$\sup_{t\in\Omega\backslash E_0} |f(t)| \leqslant \|f\|_{\infty} + \frac{1}{n}.$$

记 $E_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则一方面 $\mu(E_0) = 0$, 由 $\|f\|_{\infty}$ 的定义

$$\|f\|_{\infty} \leqslant \sup_{t\in\Omega\backslash E_0} |f(t)|.$$

另一方面

$$\sup_{t\in\Omega\setminus E_0}|f(t)| \leqslant \sup_{t\in\Omega\setminus E_n}|f(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \frac{1}{n}.$$

E_0 与 n 无关, 故 $\sup\limits_{t\in\Omega\setminus E_0}|f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$. 所以 $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in\Omega\setminus E_0}|f(t)|$.

现在验证 $\|\cdot\|_\infty$ 是 L^∞ 上的范数.

① 显然 $\|f\|_\infty \geqslant 0$. 若 $\|f\|_\infty = 0$, 则 $\exists E_0 \subset \Omega$, $\mu(E_0) = 0$ 使得在 $\Omega\setminus E_0$ 上, $|f(t)| = 0$, 即 $f(t) = 0$, a.e., 故 $f = 0$.

② 显然 $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\ \|f\|_\infty$.

③ 设 $f, g \in L^\infty$, $E_1, E_2 \subset \Omega$, $\mu(E_1) = \mu(E_2) = 0$, 并且 f, g 分别在 $\Omega\setminus E_1$, $\Omega\setminus E_2$ 上达到本性最大模, 则

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty + \|g\|_\infty &= \sup_{t\in\Omega\setminus E_1}|f(t)| + \sup_{t\in\Omega\setminus E_2}|g(t)| \\ &\geqslant \sup_{t\in\Omega\setminus(E_1\cup E_2)}|f(t)| + \sup_{t\in\Omega\setminus(E_1\cup E_2)}|g(t)| \\ &\geqslant \sup_{t\in\Omega\setminus(E_1\cup E_2)}|f(t)+g(t)| \geqslant \|f+g\|_\infty.\end{aligned}$$

所以 L^∞ 依范数 $\|f\|_\infty$ 成为线性赋范空间.

(3) 容易验证

$$\left|\int_\Omega f\,g\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \|f\|_1\ \|g\|_\infty, \quad \forall f\in L^1, \quad g \in L^\infty. \tag{1.2.7}$$

注意当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时, 若 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, 应用 Hölder 不等式可以证明

$$L^\infty \subset L^q \subset L^p \subset L^1.$$

但当 $\mu(\Omega) = \infty$ 时, L^p 与 L^q 互不包含.

例 1.2.3 空间 $l^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

考虑无穷序列空间中的元, $l^p(1 \leqslant p < \infty)$ 是其中满足 $\sum\limits_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$ 的元素全体. l^∞ 是满足 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|x_n| < \infty$ 的元素全体. 定义

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|, \tag{1.2.8}$$

则 l^p 是线性赋范空间.

实际上, 当 $1<p<\infty$ 时, 利用 Young 不等式 (1.2.2) 可以得出 Hölder 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2.9}$$

其中 $x=(x_n)\in l^p$, $y=(y_n)\in l^q$, 并且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 然后可以证明当 $1\leqslant p<\infty$ 时, 有 Minkowski 不等式

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2.10}$$

对于 $p=\infty$ 的情况可以直接验证. 总之, 对于所有 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\|\cdot\|_p$ 是 l^p 上的范数. 详细的推证留给读者.

特别地, 当 $p=2$ 时, 规定

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y}_n, \qquad \forall x,y\in l^2, \tag{1.2.11}$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 是 l^2 上的内积, l^2 是内积空间.

空间 l^p 还可以看成 L^p 的特殊情况. 取 $\Omega=N$(全体正整数), Σ 由 N 的全体子集构成, 对于每个 $E\in\Sigma$, $\mu(E)$ 是 E 中元素的个数. 此时 (N,Σ,μ) 是测度空间, $L^p=l^p$.

但应注意, 对于 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, 应用 Hölder 不等式可以得到

$$l^1\subset l^q\subset l^p\subset l^\infty.$$

例 1.2.4 空间 c 与 c_0.

用 c 表示收敛的标量序列的全体, 即

$$c=\{x=(x_n):\ x_n\in\Phi,\ \lim_{n\to\infty}x_n \text{ 存在}\}.$$

定义

$$\|x\| =\sup_{n\geqslant 1}|x_n|, \qquad \forall x=(x_n)\in c,$$

则 c 是线性赋范空间.

用 c_0 表示收敛于 0 的标量序列全体, 即

$$c_0=\{x=(x_n):\quad x_n\in\Phi,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=0\},$$

其范数与 c 中的范数相同, c_0 也是线性赋范空间, 并且 c_0 是 c 的线性子空间. 另外 c 又可以看成 l^∞ 的线性子空间.

例 1.2.5　空间 $V[a,b]$ 与 $V_0[a,b]$.

设 $V[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数全体, 对于每个 $f \in V[a,b]$, 定义

$$||f|| = |f(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \tag{1.2.12}$$

其中 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的全变差

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)|,$$

这里 π 代表 $[a,b]$ 的任一分划 $a = a_1 < b_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n = b$.

$V[a,b]$ 按函数空间的运算是线性空间, 我们验证它是赋范空间.

实际上, (1) 显然 $||f|| \geqslant 0$. 若 $||f|| = 0$, 则 $f(a) = 0$, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0$. 此时 $\sup \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| = 0$, 其中上确界是对所有如上的分划而取的. 故 $\forall t \in [a,b]$, $f(t) = f(a) = 0$, 即 $f = 0$.

(2) 显然 $||\alpha f|| = |\alpha|\,||f||$.

(3) 对于任一组分点,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |(f+g)(b_i) - (f+g)(a_i)| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)| \\ &\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).\end{aligned}$$

关于所有分划取上确界得到

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

又

$$|(f+g)(a)| \leqslant |f(a)| + |g(a)|,$$

所以

$$||f+g|| \leqslant ||f|| + ||g||.$$

特别地, 记

$$V_0[a,b] = \{f \in V[a,b] :\ f(a) = 0, f(t)\text{在}(a,b)\text{中右连续}\},$$

则 $V_0[a,b]$ 是 $V[a,b]$ 的线性子空间, $V_0[a,b]$ 上的范数是

$$||f|| = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

例 1.2.6 设 (Ω, Σ) 是可测空间, 其中 Ω 是某个集合, Σ 是由 Ω 的子集构成的 σ 代数. 设 $\mathfrak{M}$ 是定义在 Σ 上的有号 (允许取负值) 甚至取复数值的有界变差测度全体. 当 $u, v \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \Phi$ 时, 定义

$$(u+v)(A) = u(A) + v(A), \quad (\alpha u)(A) = \alpha u(A), \quad \forall A \in \Sigma,$$

则 $\mathfrak{M}$ 是线性空间. 若以全变差

$$||\mu|| = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)|, \qquad \forall u \in \mathfrak{M} \tag{1.2.13}$$

作为 $\mathfrak{M}$ 上的范数, 这里 $\pi = \{A_1, \cdots, A_n\}$ 是 Ω 到 Σ 的任一分划, 其中每个 $A_i \in \Sigma$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, 上确界是关于所有如此的分划而取的, 则 $\mathfrak{M}$ 是赋范空间.

例 1.2.7 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域, $0 < \alpha \leqslant 1$, 称函数 $f: \Omega \to \mathbf{R}$ 满足 Lipschitz 条件. 若存在 $L > 0$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

记此种函数的全体为 $\mathrm{Lip}_{\alpha}(\Omega)$. 容易验证 $\mathrm{Lip}_{\alpha}(\Omega)$ 是线性空间. 若以 $||f||_{\mathrm{Lip}\alpha}$ 为满足上述不等式的 L 的下确界, 则

$$||f|| = |f(a)| + ||f||_{\mathrm{Lip}\alpha} \tag{1.2.14}$$

是 $\mathrm{Lip}_{\alpha}(\Omega)$ 上的范数.

现在, 让我们再举出一些其他的例子.

例 1.2.8 在 Fourier 分析中会遇到绝对收敛三角级数的问题. 考虑满足条件

$$A = \left\{ f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} : \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$$

的级数全体, 对于每个 $f \in A$, 定义 $||f|| = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$, 则 $(A, \ ||\cdot||)$ 是线性赋范空间.

例 1.2.9　在调和分析中, Hardy 空间具有重要地位. 设 D 是复平面上的单位圆盘, 对于每个 $z\in D$, $z=re^{\mathrm{i}\theta}$, $0\leqslant r<1$, $0\leqslant\theta<2\pi$. 考虑在 D 中解析的函数 $f(z)=f(re^{\mathrm{i}\theta})$. Hardy 空间 H^p 是由这样的解析函数构成的:

$$H^p=\left\{f:\sup_{0\leqslant r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^p\mathrm{d}\theta<\infty\right\}\quad(1\leqslant p<\infty),$$

$$\|f\|_{H^p}=\sup_{0\leqslant r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{\mathrm{i}\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$H^\infty=\left\{f:\sup_{z\in D1}|f(z)|<\infty\right\},$$

$$\|f\|_{H^\infty}=\sup_{z\in D}|f(z)|.$$

可以证明, 当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时, H^p 是线性赋范空间.

例 1.2.10　空间 $C^{(k)}(\Omega)$.

设 Ω 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, 具有连通的内部, k 是非负整数. $C^{(k)}(\Omega)$ 是在 Ω 上具有直到 k 阶连续偏导数的 n 元函数全体. 以 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 表示 n 重指标, 其中的每个 α_i 是非负整数. 记

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}},\qquad|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

对于函数 $u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)\in C^{(k)}(\Omega)$, 令

$$\|u\|=\max_{|\alpha|\leqslant k}\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right|\quad\left(\frac{\partial^0 u}{\partial x^0}=u\right).\tag{1.2.15}$$

此时, $\|\cdot\|$ 是 $C^{(k)}(\Omega)$ 上的范数.

$C^{(k)}(\Omega)$ 是在微分方程理论中常常用到的空间. 在一维的情况, 若 $\Omega=[a,b]$, 则记为 $C^{(k)}[a,b]$, 在变分方法中也经常遇到.

例 1.2.11　空间 $H^{k,p}(\Omega)$. 这里 k 是非负整数, $1\leqslant p<\infty$. 对于例 1.2.10 中的 $C^{(k)}(\Omega)$, 不用式 (1.2.15) 作范数, 而令

$$\|u\|_{k,p}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega\left|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\tag{1.2.16}$$

则 $\|\cdot\|_{k,p}$ 也是 $C^{(k)}(\Omega)$ 上的范数. 若 $p=2$, 定义

$$(u,v)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega\partial^\alpha u(x)\overline{\partial^\alpha v(x)}\mathrm{d}x,\qquad\forall u,v\in C^{(k)}(\Omega),$$

则 $H^{k,p}(\Omega)$ 成为内积空间. 这一空间将直接导致 Sobolev 空间, 后者是在微分方程理论中用到的重要空间.

很多空间都可以纳入赋范空间的框架, 这说明研究一般赋范空间的性质是十分重要的. 另一方面在可能的条件下针对不同对象定义不同的范数, 这既是研究目的所需要的, 也是应该着意加以培养的技巧.

1.3 完备性与纲定理

在研究分析问题时, 极限的存在性是十分重要的. 在实数理论中我们知道著名的判定极限存在的 Cauchy 准则, 即实数序列是收敛的当且仅当它满足 Cauchy 条件. 当我们把视线从实数域转到一般的度量空间时会提出类似的问题: 度量空间也有序列的收敛概念, 那么是否也有相应的 Cauchy 准则呢? 实际上只需看一下有理数域 $\mathbf{Q}$ 的情况, 其中的 Cauchy 数列不一定都收敛于 $\mathbf{Q}$ 中的元, 所以 Cauchy 准则对于 $\mathbf{Q}$ 并不成立. 造成这一现象的原因并不是序列的分析性质不好, 而在于空间中的点不够多, 以至于存在 "孔洞". 在有 "孔洞" 的空间中讨论分析问题是很不方便的.

定义 1.3.1 设 (X,d) 是度量空间, $x_n \in X$, $n \geqslant 1$.

(1) 若 $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m,x_n)=0$, 则称 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列.

(2) 若 X 中的每个 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 都是收敛的, 即 $\exists x \in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$, 则称 X 是完备的.

由三角不等式容易知道每个收敛序列一定是 Cauchy 序列, 反之却未必成立.

完备的线性赋范空间称为Banach 空间, 完备的内积空间称为 Hilbert 空间. 完备空间的范数或度量有时候又称为完备范数或完备度量.

例 1.3.1 空间 $P[a,b]$ 不完备.

$P[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上实 (或复) 系数多项式的全体. 对于每个 $p \in P[a,b]$, 定义

$$||p|| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |p(t)|. \tag{1.3.1}$$

直接验证可知, $P[a,b]$ 是线性赋范空间, 但 $P[a,b]$ 不是完备的. 例如, 取

$$p_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}.$$

显然, $p_n \in P[a,b]$. 记 $c = \max\{|a|,|b|\}$, 则 $\forall m > n$,

$$\begin{aligned}
\|p_m - p_n\| &= \max_{a\leqslant t\leqslant b} |p_m(t) - p_n(t)| \\
&= \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left|\sum_{i=n+1}^{m} \frac{t^i}{i!}\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} \max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\frac{t^i}{i!}\right| \\
&\leqslant \sum_{i=n+1}^{m} \frac{c^i}{i!} \to 0 \qquad (m,n\to\infty),
\end{aligned}$$

故 p_n 是 Cauchy 序列. 另一方面我们知道

$$\max_{a\leqslant i\leqslant b} |p_n(t) - e^t| = \max_{a\leqslant i\leqslant b}\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{t^i}{i!}\right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{c^i}{i!} \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

但 $e^t \in P[a,b]$. 换句话说, p_n 在 $P[a,b]$ 中不收敛, 故 $P[a,b]$ 不完备.

例 1.3.2 $C[a,b]$ 完备.

设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 序列. $\forall \varepsilon > 0$, 存在 n_0, 当 $m,n \geqslant n_0$ 时, $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. 此时 $\forall t \in [a,b]$,

$$|x_m(t) - x_n(t)| \leqslant \|x_m - x_n\| < \varepsilon, \tag{1.3.2}$$

于是 $\{x_n(t)\}$ 是 Cauchy 数列. 故有 $x_0(t)$, 使得

$$x_n(t) \to x_0(t), \qquad t\in[a,b].$$

$x_0(t)$ 是 $[a,b]$ 上的函数. 在不等式 (1.3.2) 中固定 $n \geqslant n_0$, 令 $m\to\infty$ 得到

$$|x_0(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon, \quad t\in[a,b]. \tag{1.3.3}$$

现在取 $n \geqslant n_0$, 由 $x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性, $\exists \delta > 0$, 使得 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时 $|x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \varepsilon$, 则

$$\begin{aligned}
|x_0(t_1) - x_0(t_2)| \leqslant& |x_0(t_1) - x_n(t_1)| + |x_n(t_1) - x_n(t_2)| \\
&+ |x_n(t_2) - x_0(t_2)| < 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

故 x_0 连续, 即 $x_0 \in C[a,b]$. 不等式 (1.3.3) 还说明

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \varepsilon, \qquad n \geqslant n_0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. $C[a,b]$ 是完备的.

例 1.3.3 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 完备.

设 $\{f_n\}$ 是 L^p 中的 Cauchy 序列, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 n_0, 使得

$$||f_m - f_n||_p^p = \int_\Omega |f_m(t) - f_n(t)|^p \mathrm{d}\mu < \varepsilon^p, \qquad m, n \geqslant n_0. \tag{1.3.4}$$

$\forall \sigma > 0$, 令 $E_{mn}(\sigma) = \{t: |f_m(t) - f_n(t)| \geqslant \sigma\}$, 则

$$\begin{aligned} \sigma^p \mu(E_{mn}(\sigma)) &\leqslant \int_{E_\sigma} |f_m(t) - f_n(t)|^p \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_\Omega |f_m(t) - f_n(t)|^p \mathrm{d}\mu < \varepsilon^p. \end{aligned}$$

于是

$$\mu(E_{mn}(\sigma)) \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

由实变函数论的知识, 存在可测函数 f, 使得 f_n 依测度收敛于 f.

根据 Riesz 定理, 有子序列 $\{f_{n_k}\}$a.e. 收敛于 f. 现在我们证明依照 L^p 中的范数 $f_{n_k} \to f$. 实际上, 当 $n_i, n_k \geqslant n_0$ 时 (1.3.4) 变为

$$||f_{n_i} - f_{n_k}||_p^p < \varepsilon^p.$$

另一方面, 固定 n_k, 当 $n_i \to \infty$ 时,

$$|f_{n_i}(t) - f_{n_k}(t)|^p \to |f(t) - f_{n_k}(t)|^p, \qquad \text{a.e..}$$

由 Fatou 引理,

$$\int_\Omega |f(t) - f_{n_k}(t)|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \lim_{n_i \to \infty} \int_\Omega |f_{n_i}(t) - f_{n_k}(t)|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon^p. \tag{1.3.5}$$

故 $f - f_{n_k} \in L^p$, 从而 $f = f_{n_k} - (f - f_{n_k}) \in L^p$.

不等式 (1.3.5) 还说明 $||f - f_{n_k}||_p \leqslant \varepsilon (n_k \geqslant n_0)$. 注意 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 序列, 只要 $n \geqslant n_0$, $n_k \geqslant n_0$, 就有

$$||f_n - f||_p \leqslant ||f_n - f_{n_k}||_p + ||f_{n_k} - f||_p < 2\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$. 证毕.

L^p 中序列的依范数收敛, 即是通常所说的 p 方平均收敛. 由证明还可知道, p 方平均收敛必定依测度收敛, 反之则未必.

类似地可以证明, 空间 L^∞, $l^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c, c_0, $V_0[a, b]$ 都是完备的, 从而是 Banach 空间.

验证度量空间的完备性通常都要从给定的 Cauchy 序列找出一个 “目标元”(在例 1.3.2 中是 x_n 点点收敛的极限函数, 在例 1.3.3 中是 f_n 的依测度收敛的极限函数), 而后验证此 “目标元” 属于该空间, 并且在空间度量意义下该元是所给 Cauchy 序列的极限.

可以想见, 完备度量的空间将具有更为优良的性质. 下面让我们考察这方面的问题.

定理 1.3.1 设 X 是完备度量空间, $F_n \subset X$ 是一列非空递缩闭集, 即 $F_n \supset F_{n+1}$, $n \geqslant 1$ 并且 $\operatorname{diam} F_n \to 0$, 则 F_n 有公共元, 即 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$.

证明 取 $x_n \in F_n$, $n \geqslant 1$, 由 $F_n \supset F_{n+1}$ 知道 $x_m \in F_n$, $\forall m \geqslant n$, 从而 $d(x_m, x_n) \leqslant \operatorname{diam} F_n \to 0$. 这说明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列.

X 是完备的, 故有 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 已经知道 $x_m \in F_n(m \geqslant n)$, 由于 F_n 是闭集, 故有 $x \in F_n(n \geqslant 1)$, 或者说 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

在线性赋范空间中可以考虑无穷级数及其收敛问题. 一个 (形式) 级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 称为是可和 (收敛) 的, 若存在 $x \in X$, 使得部分和序列 $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 依 X 的范数收敛于 x, 此时记 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 称为是绝对可和的, 若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$. 与数值级数不同, 一个绝对可和的级数可能不是可和的, 例 1.3.1 就提供了这方面的例子. 下面定理说明这个问题与空间的完备性密切相关.

定理 1.3.2 设 X 是线性赋范空间, X 是完备的当且仅当其中任一绝对可和级数是可和的.

证明 若 X 完备, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$, $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, 则

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \right\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\| \to 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

于是 $\{s_n\}$ 是 Cauchy 序列. 从而存在 $x \in X$, $s_n \to x$, 即 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$.

反之, 若 X 中任一绝对可和级数可和, $\{s_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. $\forall k \geqslant 1$, 取 n_k 是使 $\|s_m - s_{n_k}\| < \dfrac{1}{2^k}(\forall m \geqslant n_k)$ 成立的自然数, 不妨设 n_k 是递增的. 令

$x_1 = s_{n_1}, x_k = s_{n_k} - s_{n_{k-1}} (k \geqslant 2)$, 则

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||x_i|| = ||s_{n_1}|| + \sum_{k=2}^{\infty} ||s_{n_k} - s_{n_{k-1}}|| \leqslant ||s_{n_1}|| + 1 < \infty,$$

即级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$绝对可和. 由假设存在 $x \in X$ 使得 $\sum_{k=1}^{i} x_k = s_{n_i} \to x$. $\forall \varepsilon > 0$, 存在 n_0, 使得当 $n_i \geqslant n_0$ 时, $||s_{n_i} - x|| < \frac{\varepsilon}{2}$. 另一方面, $\{s_n\}$ 是 Cauchy 序列, 只要 n_0 足够大, 当 $n, n_i \geqslant n_0$ 时, $||s_{n_i} - s_n|| < \frac{\varepsilon}{2}$. 此时

$$||s_n - x|| \leqslant ||s_n - s_{n_i}|| + ||s_{n_i} - x|| < \varepsilon,$$

即 $s_n \to x$, 这说明 X 是完备的.

为了叙述完备空间的另一个重要性质, 让我们先来介绍度量空间中集合的稠密性和 Baire 纲的概念.

定义 1.3.2 设 X 是度量空间, $E \subset X$.

(1) 称 E 在 X 中稠密, 若 $\overline{E} = X$.

(2) 称 E 在 X 中无处稠密, 若 $(\overline{E})^\circ = \varnothing$.

(3) 称 E 是第一纲集, 若 E 可以写成至多可数多个无处稠密集的并. 不是第一纲的集合称为是第二纲的.

(4) 称空间 X 具有 Baire 性质, 若 X 中可数多个稠密开集之交仍在 X 中稠密.

例如, 有理数的全体 $\mathbf{Q}$ 在整个实数域 $\mathbf{R}$ 中是稠密的. 而 Cantor 的三分点集在 $[0,1]$ 中是无处稠密的.

下面两个命题可以将这些抽象的概念 "直观化" 一些.

命题 1.3.1 设 X 是度量空间, $E \subset X$, 则以下条件等价:

(1) E 在 X 中稠密.

(2) 对于 X 中任一非空开集 U, $E \bigcap U \neq \varnothing$.

(3) 对于任何 $x \in X$, 存在 $x_n \in E$, 使得 $x_n \to x$.

证明 (1) $\Rightarrow$(2). 设 U 是 X 中的非空开集. 由于 $\overline{E} = E \bigcup E'$, 故 $E \bigcup E' \supset U$. 于是要么 $E \bigcap U \neq \varnothing$, 此时结论已真; 要么 $E' \bigcap U \neq \varnothing$, 此时由 E 的性质 (命题 1.1.5(3)), 存在 $x_n \in E$, $x_n \neq x$, $x_n \to x$. 显然必有某个 $x_n \in U$, 所以也有 $E \bigcap U \neq \varnothing$.

(2) $\Rightarrow$(3). $\forall x \in X$, 取 $U_n = O(x, r_n)$, $r_n \to 0$, 由 (2) 中条件, $\exists x_n \in U_n \bigcap E$, 于是 $x_n \to x$. (3)$\Rightarrow$(1) 是明显的.

命题 1.3.2 设 X 是度量空间, $E\subset X$, 则以下条件等价:

(1) E 在 X 中无处稠密.

(2) $\overline{E}$ 在 X 中无处稠密.

(3) 对于任一球 $U\subset X$, 存在球 $V\subset U$, 使得 $V\bigcap E=\varnothing$.

(4) $(\overline{E})^c$ 在 X 中稠密.

证明 (1) 与 (2) 的等价性直接由定义得到.

(1)⇒(3). 若 E 在 X 中无处稠密, 即 $(\overline{E})^\circ=\varnothing$, 则对于任一球 U, $U\backslash\overline{E}\neq\varnothing$. 注意 $U\backslash\overline{E}$ 是非空开集, 从而存在球 $V\subset U\backslash\overline{E}$.

(3)⇒(1). 若 $(\overline{E})^\circ\neq\varnothing$, 取 $U=(\overline{E})^\circ$, 则对于任一球 $V\subset U$, $V\subset\overline{E}$, 此时 $V\bigcap E\neq\varnothing$, 与 (3) 矛盾.

(1)⇒(4). 记 $B=(\overline{E})^c$, 若 $\overline{B}\neq X$, 则 $\overline{E}=X\backslash B\supset X\backslash\overline{B}\neq\varnothing$. 后者是开集, 故 $(\overline{E})^\circ\neq\varnothing$, 从而 E 不是无处稠密的. 矛盾.

(4)⇒(2). $(\overline{E})^c$ 在 X 中稠密, 则 $\overline{E}$ 不含内点, 即 $(\overline{E})^\circ=\varnothing$.

定理 1.3.3 (Baire) (1) 完备度量空间具有 Baire 性质.

(2) 具有 Baire 性质的空间自身是第二纲集.

证明 (1) 设 X 是完备的, B_i 是 X 中一列稠密开集, 只需证明对于任一球 $U\subset X$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i\bigcap U\neq\varnothing$.

B_1 在 X 中稠密, 故 $B_i\bigcap U\neq\varnothing$. 此时 $\exists x_1\in X, r_1>0$, 使得 $O(x_1,r_1)\subset B_1\bigcap U$. 于是闭球 $S\left(x_1,\dfrac{r_1}{2}\right)\subset B_1\bigcap U$.

又 B_2 在 X 中稠密, 故 $B_2\bigcap O\left(x_1,\dfrac{r_1}{2}\right)\neq\varnothing$. 从而 $\exists x_2\in X$ 和 $r_2>0$ $\left(\text{不妨设 } r_2<\dfrac{r_1}{2}\right)$, 使得 $O(x_2,r_2)\subset B_2\bigcap O\left(x_1,\dfrac{r_1}{2}\right)\subset B_2\bigcap U$, 此时闭球$S\left(x_2,\dfrac{r_2}{2}\right)\subset S\left(x_1,\dfrac{r_1}{2}\right),\cdots$.

如此做下去得到满足定理 1.3.1 条件的递缩闭球序列

$$S\left(x_n,\frac{r_n}{2}\right)\subset O(x_n,r_n)\subset B_n\bigcap U.$$

由空间 X 的完备性, $\exists x\in X$,

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S\left(x_n,\frac{r_n}{2}\right)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}O(x_n,r_n)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\bigcap U,$$

故 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i\bigcap U\neq\varnothing$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$ 在 X 中稠密.

(2) 若 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 其中 E_n 是无处稠密集, 显然 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$. 令 $B_n = X \backslash \overline{E}_n$, B_n 为开集并且由命题 1.3.2(4), B_n 在 X 中稠密. 现在

$$\varnothing = X \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \backslash \overline{E}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

这与 X 的 Baire 性质矛盾, 所以 X 是第二纲集. 证毕.

下面让我们介绍一些关于映射的记号和基本知识.

设 T 是从集合 X 到集合 Y 中的映射 (算子), $A \subset X$, $B \subset Y$, 今后记

$$T(A) = \{y \in Y : y = Tx, \forall x \in A\},$$

$$T^{-1}(B) = \{x \in X : y = Tx, \forall y \in B\}.$$

分别称 $T(A)$ 是集合 A 的象, $T^{-1}(B)$ 是集合 B 的原象.

定义 1.3.3 设 X, Y 是两个度量空间, $T : X \to Y$ 是一个映射.

(1) 称 T 在 $x_0 \in X$ 连续, 若 $\forall x_n \in X$, $x_n \to x_0$, 则 $Tx_n \to Tx_0$.

(2) 若 T 在 X 的每一点连续, 称 T 在 X 上连续.

T 在一点 x_0 连续的定义也可以用邻域的说法来表述, 即 T 在 x_0 连续当且仅当对于 Tx_0 的任一邻域 $O(Tx_0)$, 存在 x_0 的邻域 $O(x_0)$ 使得 $T(O(x_0)) \subset O(Tx_0)$. 甚至于可以用 ε-δ 语言来叙述连续性, 它们彼此是等价的. 读者不妨作为练习直接验证. 关于在整个空间上的连续性我们有下面结果.

定理 1.3.4 设 X, Y 是度量空间, $T : X \to Y$ 是一映射.

(1) T 在 X 上连续当且仅当对于任一开集 $B \subset Y$, $T^{-1}(B)$ 是 X 中的开集.

(2) 上面开集换为闭集结论仍成立.

证明 分别以 $O(x)$, $O(Tx)$ 表示 x 在 X 中和 Tx 在 Y 中的邻域, 它们是包含该点的任一开集.

(1) 设 T 在 X 上连续, $B \subset Y$ 是开集. $\forall x \in T^{-1}(B)$, 由 $y = Tx \in B$, 取 $O(Tx) \subset B$. T 在 x 连续, 从而有 $O(x)$, $T(O(x)) \subset O(Tx) \subset B$, 于是 $O(x) \subset T^{-1}(B)$, x 是 $T^{-1}(B)$ 的内点. $T^{-1}(B)$ 是开集.

反之, 若对于任一开集 $B \subset Y$, $T^{-1}(B)$ 是开集, 则 $\forall x \in X$ 和 Tx 的邻域 $O(Tx)$, $O(x) = T^{-1}(O(Tx))$ 是开集. 显然 $x \in O(x)$, $T(O(x)) \subset O(Tx)$, 这说明 T 在 x 连续, 从而在 X 上连续.

(2) 从等式 $T^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash T^{-1}(B) (\forall B \subset Y)$ 即得.

定义 1.3.4 设 X, Y 是线性空间, $T : X \to Y$ 是一映射.

(1) 称 T 是线性算子 (线性映射), 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2. \tag{1.3.6}$$

(2) 当 $Y = \Phi$ 时, (1) 中的线性算子 T 称为 X 上的线性泛函.

关于线性算子 $T: X \to Y$, 以下事实应该注意:

(1) $T0 = 0$. 记 $N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$, 容易验证 $N(T)$ 是 X 的线性子空间, 称 $N(T)$ 是 T 的零空间.

(2) 若 $\forall Tx_1, Tx_2$, 由 $Tx_1 = Tx_2$ 可推出 $x_1 = x_2$, 则称 T 是一一的 (单射). 容易知道 T 是一一的当且仅当 $N(T) = \{0\}$.

若 T 是一一映射, 则对于每个 $y \in R(T)$, $T^{-1}y$ 是 X 中唯一的元素. 此时称映射 $T^{-1} : R(T) \to X$(其中 $Tx = y$ 时 $T^{-1}y = x$) 是 T 的逆映射. 所以一一映射又称为是可逆的. 容易验证此时 T^{-1} 也是线性算子.

(3) 记 $R(T) = T(X)$, 可以验证 $R(T)$ 是 Y 的线性子空间, 称 $R(T)$ 是 T 的值空间. 若 $R(T) = Y$, 称 T 是到上的 (满射).

既是满射又是单射的映射又称为双射.

线性算子与线性泛函在线性代数、几何和经典分析中都是经常遇到的. 现举两例.

例 1.3.4　设 $X = \Phi^n$, $Y = \Phi^m$. 对于每个 $m \times n$ 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, 定义 $T : X \to Y$, $T(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_m)$ 使得

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \qquad j = 1, \cdots, m, \tag{1.3.7}$$

容易验证 T 是线性算子. 若用矩阵表示, 式 (1.3.7) 即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

这是在线性代数中研究的线性算子.

例 1.3.5　在 $C[a, b]$ 上定义

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(s)\mathrm{d}s, \quad t \in [a, b], \quad S(x) = \int_a^b x(s)\mathrm{d}s.$$

则 T, S 分别是 $C[a, b]$ 上的线性算子与线性泛函.

例 1.3.6 在 $C^{(k)}(\Omega)$ 上定义的微分算子

$$(Du)(t) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(t) \frac{\partial^\alpha u(t)}{\partial t^\alpha} \tag{1.3.8}$$

$\left(这里\dfrac{\partial^0 u(t)}{\partial t^0} = u, a_\alpha(t)在\Omega上连续\right)$ 都是线性算子.

在求解各种类型的算子方程时, 首先遇到的是解的存在性和唯一性问题. 这类问题在泛函分析中即所谓不动点问题, 其中关于不动点的存在性往往与空间的完备性直接有关.

定义 1.3.5 设 X 是度量空间, $T: X \to X$ 是一个映射 (不必线性), 若存在 a, $0 \leqslant a < 1$ 使得

$$d(Tx, Ty) \leqslant a\, d(x, y), \qquad \forall x, y \in X, \tag{1.3.9}$$

则称 T 是 X 上的压缩映射.

若存在 $x \in X$ 使得 $Tx = x$, 则称 x 是 T 的不动点.

定理 1.3.5 完备度量空间上的压缩映射具有唯一的不动点.

证明 由 (1) 容易验证压缩映射是连续的.

任取 $x_0 \in X$, 则

$$Tx_0, \quad T^2 x_0 = T(Tx_0), \quad \ldots, \quad T^n x_0 = T(T^{n-1} x_0)$$

可归纳地加以定义. 我们证明 $\{T^n x_0\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 实际上由压缩性

$$d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \leqslant a d(T^n x_0, T^{n-1} x_0) \leqslant \cdots \leqslant a^n d(Tx_0, x_0),$$

从而对于任何自然数 p,

$$\begin{aligned} d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) &\leqslant a^n d(T^p x_0, x_0) \\ &\leqslant a^n (d(T^p x_0, T^{p-1} x_0) + \cdots + d(Tx_0, x_0)) \\ &\leqslant a^n (a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots + 1) d(Tx_0, x_0) \\ &\leqslant \frac{a^n}{1-a} d(Tx_0, x_0). \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

由于 $0 \leqslant a < 1$, 不难知道 $\{T^n x_0\}$ 是 Cauchy 序列.

X 是完备的, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0 = \overline{x}, \overline{x} \in X$. 由 T 的连续性

$$T\overline{x} = T(\lim_{n\to\infty} T^n x_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^n x_0) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1} x_0 = \overline{x},$$

$\overline{x}$ 是 T 的不动点. 这说明不动点是存在的.

若另有 $\overline{y} \in X$, $T\overline{y} = \overline{y}$, 则仍由压缩性

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T\overline{x}, T\overline{y}) \leqslant a d(\overline{x}, \overline{y}),$$

此时必有 $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, 从而 $\overline{x} = \overline{y}$. 这说明不动点是唯一的. 证毕.

注意在不等式 (1.3.10) 中令 $p \to \infty$, 由于 $\lim\limits_{p\to\infty} T^{n+p}x_0 = \overline{x}$, 可以得到

$$d(T^n x_0, \overline{x}) \leqslant \frac{a^n}{1-a} d(Tx_0, x_0). \tag{1.3.11}$$

此式给出了 x_0 经过 T 的 n 次迭代到不动点 $\overline{x}$ 的距离的估计.

命题 1.3.3 设 $T: X \to X$ 是 X 上的映射, 若对于某个自然数 k, T^k 有唯一不动点, 则 T 以同一点为唯一不动点.

证明 设 $x \in X$ 是 T^k 的唯一不动点, $T^k x = x$, 则

$$Tx = T(T^k x) = T^k(Tx).$$

这说明 Tx 是 T^k 的不动点. 由唯一性知道 $Tx = x$. 又 T 的每个不动点必是 T^k 的不动点, 所以 T 的不动点是唯一的.

让我们看两个应用不动点定理解决某些问题的例子.

例 1.3.7 考虑具有初值条件的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{1.3.12}$$

其中 $f(x,y)$ 是二元连续函数并且满足关于 y 的 Lipschitz 条件:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

$$\forall x \in [x_0, x_0 + \delta], \qquad -\infty < y_1, y_2 < \infty.$$

则当 $\delta L < 1$ 时, 此微分方程存在唯一连续解.

实际上, 考虑映射 $T: C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t))\mathrm{d}t, \qquad \forall y \in C[a,b] \tag{1.3.13}$$

(这里记 $a = x_0$, $b = x_0 + \delta$), 则 y 是方程 (1.3.12) 的解当且仅当 y 是 (1.3.13) 中算

子 T 的不动点. 由 Lipschitz 条件, 按 $C[a,b]$ 中的范数有

$$\begin{aligned}
||Ty_1 - Ty_2|| &= \max_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x [f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))]\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_a^b L|y_1(t) - y_2(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant L(b-a) \max_{t\in[a,b]} |y_1(t) - y_2(t)| \\
&\leqslant \delta\, L||y_1 - y_2||.
\end{aligned}$$

由 $\delta\, L < 1$ 知道 T 是压缩的. 由于 $C[a,b]$ 是完备的, 定理 1.3.5 表明 T 有唯一不动点, 从而方程 (1.3.12) 存在唯一连续解.

例 1.3.8 考虑 Volterra 型积分方程

$$x(t) = \mu\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau + \varphi(t), \qquad t\in[a,b], \tag{1.3.14}$$

其中 $K(s,t)$ 是矩形 $a\leqslant s,\ t\leqslant b$ 上的连续函数, $\varphi\in C[a,b]$. 对于每个 $\mu\in\Phi$, 我们证明此方程在 $C[a,b]$ 中存在唯一解.

实际上, 设 $\sup\limits_{a\leqslant s,t\leqslant b}|K(s,t)| = M$, 则 $M<\infty$. 考虑映射 $T: C[a,b]\to C[a,b]$,

$$(Tx)(t) = \mu\int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau + \varphi(t), \qquad \forall x\in C[a,b],$$

则

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &= |\mu|\left|\int_a^t K(t,\tau)((x(\tau) - y(\tau))\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant |\mu|M \sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t) - y(t)|\ |t-a| \\
&= |\mu|M(t-a)\ d(x,y).
\end{aligned}$$

归纳地, 若

$$|(T^n x)(t) - (T^n y)(t)| \ \leqslant\ |\mu|^n M^n \frac{(t-a)^n}{n!} d(x,y), \tag{1.3.15}$$

则

$$
\begin{aligned}
|(T^{n+1}x)(t)-(T^{n+1}y)(t)| &= |\mu|\left|\int_a^t K(t,\tau)((T^nx)(\tau)-(T^ny)(\tau))\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant |\mu|^{n+1}M^{n+1}\frac{1}{n!}\int_a^t(\tau-a)^n\mathrm{d}\tau d(x,y) \\
&= |\mu|^{n+1}M^{n+1}\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}d(x,y).
\end{aligned}
$$

由此得到对于任何自然数 n,

$$
\begin{aligned}
d(T^nx,T^ny) &= \sup_{a\leqslant t\leqslant b}|(T^nx)(t)-(T^ny)(t)| \\
&\leqslant \frac{|\mu|^nM^n(b-a)^n}{n!}d(x,y).
\end{aligned}
$$

取 n 足够大, 使 $|\mu|^nM^n(b-a)^n/n!<1$, 则 T^n 是 $C[a,b]$ 上的压缩映射. $C[a,b]$ 完备, 所以 T^n 有唯一不动点. 再由命题 1.3.3, T 有同一不动点. 它即是方程 (1.3.6) 的解.

对于线性空间 X 上的一个算子 $T:X\to X$, 方程 $Tx=y$ 的求解问题很容易变成一个不动点的存在问题. 例如, 设

$$
Vx=x+Tx-y,
$$

则 V 的不动点即是 $Tx=y$ 的解. 让我们给出一个更一般的例子.

例 1.3.9 设 X 是 Banach 空间, U 是从 X 到 X 中的算子, 若

$$
\|Ux_1-Ux_2\|\leqslant a\|x_1-x_2\|, \qquad \forall x_1,x_2\in X,
$$

其中 $0\leqslant a<1$, 则方程 $Ux=x+y$ 有唯一解.

实际上, 如上面所述, 令 $Vx=Ux-y$, 则

$$
\|Vx_1-Vx_2\|=\|Ux_1-Ux_2\|\leqslant a\|x_1-x_2\|, \qquad \forall x_1,x_2\in X,
$$

即 V 是 X 上的压缩映射. X 完备, 故存在 $\overline{x}\in X, V\overline{x}=\overline{x}$, 从而 $\overline{x}=U\overline{x}-y$, $\overline{x}$ 是 $Ux=x+y$ 的唯一解.

现在让我们回到本节开头所说的问题. 一个度量空间可能不是完备的, 那么是否可以补充某些元素使之成为完备空间呢? 答案是肯定的. 下面我们来证明所谓的完备化定理, 为此需要引入同构概念.

定义 1.3.6 设 X,Y 是度量空间, 称映射 $T:X\to Y$ 是同构映射, 若 T 与 T^{-1} 都连续. 称 X 与 Y 彼此同构, 若存在一一的到上的同构映射 $T:X\to Y$. 若 X,Y 是线性赋范空间, 则还要求上述映射 $T:X\to Y$ 是线性映射.

若 T 是到上的并且 $\forall x_1, x_2 \in X$, $d(Tx_1, Tx_2) = d(x, y)$, 则称 T 是等距同构.

容易验证等距同构映射一定是同构映射.

注意等距同构的两个空间除了表示它们的符号不同之外是无法区分的, 因此可以看成同一个空间或者说两个空间相等.

定理 1.3.6 设 (X, d) 是度量空间, 则存在完备度量空间 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 使得 X 与 $\tilde{X}$ 的稠密子空间等距同构. 在等距同构意义下, $\tilde{X}$ 是包含 X 的最小完备空间, 从而是唯一的.

称 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 是 (X, d) 的完备化空间.

证明 记 X 中的 Cauchy 序列全体为 E. 若序列 (x_n), $(y_n) \in E, d(x_n, y_n) \to 0$, 则称二者等价, 记为 $(x_n) \sim (y_n)$. 直接验证可知关系 "$\sim$" 满足自反性、对称性、传递性, 因此是 E 上的等价关系 (见附录 A). 以 $\tilde{X} = E/\sim$ 记如此等价类的全体, 并且定义

$$\tilde{d}(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n), \qquad \forall \xi = (x_n),\ \eta = (y_n) \in \tilde{X}. \tag{1.3.16}$$

我们验证 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 是度量空间.

(1) 首先 $\tilde{d}$ 有完全确定的意义, 即其中的极限存在并且不随 $(x_n), (y_n)$ 的选取而改变. 实际上由于 $(x_n), (y_n)$ 是 Cauchy 序列, 故

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leqslant d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \to 0 \qquad (m, n \to \infty),$$

所以实数列 $\{d(x_n, y_n)\}$ 是收敛的. 若 $(x_n), (x_n')$ 同在 ξ 代表的等价类中, $(y_n), (y_n')$ 同在 η 所在的等价类中, 则

$$d(x_n, x_n') \to 0, \qquad d(y_n, y_n') \to 0.$$

于是

$$|d(x_n, y_n) - d(x_n', y_n')| \leqslant d(x_n, x_n') + d(y_n, y_n') \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

即

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n', y_n') = \tilde{d}(\xi, \eta).$$

(2) 为证 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 是度量空间, 注意 $\tilde{d}(\xi, \eta) \geqslant 0$ 是明显的. 若 $\tilde{d}(\xi, \eta) = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, $(x_n), (y_n)$ 在同一等价类中, 所以由定义 $\xi = \eta$, 易知

$$\tilde{d}(\eta, \xi) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \tilde{d}(\xi, \eta).$$

然后由 X 中的三角不等式, 若 $\zeta=(z_n)\in\tilde{X}$, 则

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\xi,\zeta)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,z_n)&\leqslant\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)+\lim_{n\to\infty}d(y_n,z_n)\\&=\tilde{d}(\xi,\eta)+\tilde{d}(\eta,\zeta),\end{aligned}$$

得到 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 中的三角不等式.

(3) $\forall x\in X$, 考虑序列 $(x,x,\cdots)$, 记它所在的等价类为 $\tilde{x}$. 此种 $\tilde{x}$ 的全体记为 $\tilde{X}_0$, 容易知道 $\tilde{X}_0$ 是 $\tilde{X}$ 的线性子空间, 并且由于

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y),\qquad\forall x,y\in X,$$

X 与 $\tilde{X}_0$等距同构.

为证 $\tilde{X}_0$ 是 $\tilde{X}$ 的稠密子空间, 注意 $\forall\xi\in\tilde{X}$, 不妨设 $\xi=(x_n)$, 其中 $x_n\in X$. 对于每个 n, 记 $\tilde{x}_n=(x_n,x_n,\cdots)$, 则 $\tilde{x}_n\in\tilde{X}_0$. 由于 (x_n) 是 Cauchy 序列, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0$, 使得 $k,n\geqslant n_0$ 时 $d(x_k,x_n)<\varepsilon$, 从而

$$\tilde{d}(\xi,\tilde{x}_k)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_k)\leqslant\varepsilon,\qquad k\geqslant n_0,\tag{1.3.17}$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{x}_k=\xi$.

(4) 最后证明 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是完备的. 设 $\xi_k=(x_{kn})$ 是 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 中 Cauchy 序列, $\forall\varepsilon>0$, $\exists k_0$, 当 $k,k'\geqslant k_0$ 时,

$$\tilde{d}(\xi_k,\xi_{k'})=\lim_{n\to\infty}d(x_{kn}-x_{k'n})<\varepsilon.\tag{1.3.18}$$

对于每个 ξ_k, 由 (3) 所证, 存在 $\tilde{x}_k=(x_k,x_k,\cdots)\in\tilde{X}_0$ 使得

$$\tilde{d}(\xi_k,\tilde{x}_k)=\lim_{n\to\infty}d(x_{kn},x_k)<\frac{1}{k},\qquad\forall k\geqslant 1.\tag{1.3.19}$$

令 $\xi=(x_1,x_2,\cdots)$, 由 (1.3.18), (1.3.19), 当 n 足够大时,

$$\begin{aligned}d(x_k,x_{k'})&\leqslant d(x_k,x_{kn})+d(x_{kn},x_{k'n})+d(x_{k'n},x_{k'})\\&<\frac{1}{k}+d(x_{kn},x_{k'n})+\frac{1}{k'},\end{aligned}$$

所以当 k, k' 足够大时, $d(x_{kn},x_{k'n})$ 可任意小, 从而 $d(x_k,x_{k'})$ 也任意小, 于是 (x_k) 是 X 中的 Cauchy 序列, $\xi\in\tilde{X}$. 现在由 (1.3.17), (1.3.19) 两式得到

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{d}(\xi_k,\xi)\leqslant\lim_{k\to\infty}\tilde{d}(\xi_k,\tilde{x}_k)+\lim_{k\to\infty}\tilde{d}(\tilde{x}_k,\xi)=0.$$

所以 $\xi_k \to \xi$, $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 是完备的. $\tilde{X}$ 是 X 的完备化空间.

若 $\tilde{X}'$ 是包含 X 的另一完备空间, X 与 $\tilde{X}'$ 的稠密子空间等距同构, 则 $\forall \xi \in \tilde{X}$, 不妨设 $\tilde{x}_n \in \tilde{X}_0$ 使得 $\tilde{x}_n \to \xi$. 此时 $x_n \in X$, 从而又有 $\tilde{x}_n \in \tilde{X}'$. 于是由 $\tilde{X}'$ 的完备性, 必有 $\xi' \in \tilde{X}'$ 使得 $\tilde{x}_n \to \xi'$. 定义 $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}'$, $\xi \mapsto \xi'$, 则

$$\tilde{d}'(\xi', \eta') = \tilde{d}'(\varphi(\xi), \varphi(\eta)) = \lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \tilde{d}(\xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in \tilde{X}. \tag{1.3.20}$$

所以 φ 是 $\tilde{X}$ 到 $\tilde{X}'$ 的子空间上的等距同构. 于是 $\tilde{X} \subset \tilde{X}'$, $\tilde{X}$ 是最小的. 证毕.

对于赋范空间, 内积空间都有相应的完备化定理.

定理 1.3.7 设 X 是线性赋范空间, 则存在 Banach 空间 $\tilde{X}$ 使得 X 与 $\tilde{X}$ 的稠密子空间等距同构. 若 X 是内积空间, 则 $\tilde{X}$ 是 Hilbert 空间.

要验证一个完备空间 $\tilde{X}$ 是另一个空间 X 的完备化空间, 只需检验①$X \subset \tilde{X}$(此时要特别注意二者的度量或范数是一致的); ②X 在 $\tilde{X}$ 中稠密. 例如, 根据 Weierstrass 定理, 例 1.3.1 中 $P[a,b]$ 的完备化空间是 $C[a,b]$. 对于空间

$$X = \left\{ x \in C[a,b] : \ \|x\| = \int_a^b |x(t)| \mathrm{d}t \right\},$$

由 Lyzin 定理, X 的完备化空间是 $L_1[a,b]$. 读者不妨自行验证.

1.4 紧性与有限维空间

称一个集族 $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 覆盖集合 A, 若 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \supset A$.

定义 1.4.1 设 X 是度量空间, $A \subset X$.

(1) 称 A 是紧的, 若 X 中任一覆盖 A 的开集族中存在有限个开集仍覆盖 A.

(2) A 称为是相对紧的, 若 $\overline{A}$ 紧.

(3) 称 $E \subset X$ 是 A 的 ε 网, 若集族 $\{O(x,\varepsilon) : x \in E\}$ 覆盖 A.

(4) 称 A 是完全有界的, 若 $\forall \varepsilon > 0$, X 中存在由有限个元素构成的 A 的 ε 网.

注意 在 (3) 中, 作为 A 的 ε 网的集合 E, 并没有要求 $E \subset A$. 实际上对于一个集合来说, 是否要求 $E \subset A$ 并不改变其完全有界性.

先让我们看一个例子.

例 1.4.1 在 l^2 中, 令 $e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{n}, 0, \cdots)$, 则 $\|e_n\|_2 = 1, n \geqslant 1$. 集合 $A = \{e_n : n \geqslant 1\}$ 不是紧集. 实际上,

$$\|e_m - e_n\| = \sqrt{2}, \qquad \forall m \neq n,$$

若取 $B_n = O(e_n, 1/2)$, 则 $\{B_n : n \geqslant 1\}$ 是 A 的一族开覆盖. 但由于每个 B_n 只包含一个 e_n, 其中没有任何有限子族覆盖 A. 注意 A 还是 l^2 中的有界集, 由于 A 中不存在 Cauchy 序列, 所以它还是闭集.

此例告诉我们在无穷维空间情况, 有界闭集不一定是紧集, 其中每个无穷序列也不必有收敛的子序列. 换句话说, 在无穷维空间中, Bolzano-Weierstrass 定理并不成立.

定理 1.4.1　设 X 是度量空间, $A \subset X$, 则下面两条件等价:

(1) A 是紧集.

(2) A 中任一无穷序列 $\{x_n\}$ 包含有子序列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x$ 并且 $x \in A$.

证明　(1)⇒(2). 设 A 紧, $\{x_n\}$ 是 A 中的无穷序列. 若 $\{x_n\}$ 无子序列收敛于 A 中的元, 则 $\forall x \in A$, $\exists\, r_x > 0$ 和自然数 n_x, 使得 $O(x, r_x) \bigcap \{x_n : n \geqslant n_x\} = \varnothing$. 注意到 $\bigcup\limits_{x \in A} O(x, r_x) \supset A$, 由 A 的紧性, 存在 $x'_1, \cdots, x'_k$, 使得 $\bigcup\limits_{j=1}^{k} O(x'_j, r_{x'_j}) \supset A$. 但当 $m \geqslant \max\{n_{x'_1}, \cdots, n_{x'_k}\}$ 时, $O(x'_j, r_{x'_j}) \bigcap \{x_n : n \geqslant m\} = \varnothing$, 从而

$$\{x_n : n \geqslant m\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} O(x'_j, r_{x'_j}) \bigcap \{x_n : n \geqslant m\} = \varnothing,$$

矛盾.

(2)⇒(1). 反之, 设 $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 A 的任意一族开覆盖. 对于每个 $x \in A$, 存在 B_λ, $x \in B_\lambda$. B_λ 是开集, 故存在 $r > 0$, $O(x, r) \subset B_\lambda$. 记

$$r_x = \sup\{r : O(x, r) \subset B_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\},$$

显然 $r_x > 0$. 我们要证明 $r_0 = \inf\limits_{x \in A} r_x > 0$(称 r_0 是 A 的 Lebesgue 数).

由下确界定义, 存在 $x_n \in A$, $r_{x_n} \to r_0$. 根据定理中条件, 存在子序列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0 \in A$. 不妨设 $x_0 \in B_{\lambda_0}$, 于是存在 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, $x_{n_k} \in O(x_0, r_{x_0}/2)$, 此时必有

$$O(x_{n_k}, r_{x_0}/2) \subset O(x_0, r_{x_0}) \subset B_{\lambda_0}.$$

于是 $r_{x_{n_k}} > r_{x_0}/2$, $k \geqslant k_0$,

$$r_0 = \lim_{k \to \infty} r_{x_{n_k}} \geqslant r_{x_0}/2 > 0.$$

现在任取 $x_1 \in A$, 若 $O(x_1, r_0) \supset A$ 并且 $O(x_1, r_0) \subset B_{\lambda_1}$, 则 B_{λ_1} 覆盖 A. 否则存在 $x_2 \in A \backslash O(x_1, r_0)$. 若 $\bigcup\limits_{i=1}^{2} O(x_i, r_0) \supset A$ 并且 $O(x_2, r_0) \subset B_{\lambda_2}$, 则 B_{λ_1}, B_{λ_2}

覆盖 A. 否则存在 $x_3 \in A \backslash \bigcup_{i=1}^{2} O(x_i, r_0)$, …… 如果这一过程可以无限进行下去, 由此得到序列 $\{x_n\}$, 显然 $d(x_m, x_n) \geqslant r_0$, $m \neq n$. $\{x_n\}$ 无收敛子序列, 与 (2) 矛盾. 于是存在某个 n, $\bigcup_{i=1}^{n} O(x_i, r_0) \supset A$. 此时若 $O(x_i, r_0) \subset B_{\lambda_i}$, $i = 1, \cdots, n$, 则 A 被 $B_{\lambda_1}, \cdots, B_{\lambda_n}$ 覆盖. 由定义知道 A 是紧集.

推论 1.4.1 每个紧集是有界闭集. 紧集的每个闭子集是紧的.

这是因为对于紧集 A 中的每个序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n \to x$, 必有子列 $x_{n_k} \to x \in A$, 所以 A 闭. 另一方面, 若 A 紧, $E \subset A$ 是闭的, 则 $\forall x_n \in E$, 有子列 $x_{n_k} \to x$, E 闭, 故 $x \in E$. 所以 E 紧.

定理 1.4.2 设 X 是度量空间, $A \subset X$, 则下面两条件等价:

(1) A 是相对紧集.

(2) A 中任一无穷序列 $\{x_n\}$ 包含收敛子序列 (极限点不必在 A 中).

证明 (1) 若 $\overline{A}$ 紧, $\{x_n\} \subset A \subset \overline{A}$, 由定理 1.4.1, 存在子序列 $x_{n_k} \to x \in \overline{A} \subset X$.

(2) 反之, 设 (2) 成立. 若 $\{x_n\}$ 是 $\overline{A}$ 中的无穷序列, 构造 A 中的无穷序列 $\{y_n\}$,

$$y_n = \begin{cases} x_n, & x_n \in A, \\ x_n', & x_n \in \overline{A} \backslash A, \end{cases}$$

其中 $x_n' \in A$, $d(x_n', x_n) < n^{-1}$. 则 $\{y_n\} \subset A$, 由 (2), 存在子列 $y_{n_k} \to y \in X$. 显然 $y \in \overline{A}$ 并且不难验证 $x_{n_k} \to y$. 由定理 1.4.1 知 $\overline{A}$ 紧.

定理 1.4.3 设 X 是度量空间, $A \subset X$, 则下面两条件等价:

(1) A 是完全有界集.

(2) A 中任一无穷序列 $\{x_n\}$ 包含 Cauchy 子序列.

证明 (1) 若 A 是完全有界的, $\{x_n\} \subset A$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 则 A 有有限 $\frac{1}{2}$ 网. $\{x_n\}$ 是无限的, 故至少有一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的球包含无穷多个 x_n, 记它们为 $\{x_{1i}\}$, 显然 $d(x_{1i}, x_{1j}) < 1$. $\{x_{1i}\}$ 作为 A 的子集同样是完全有界的, 现在取 $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$. $\{x_{1i}\}$ 有有限的 $\frac{1}{2^2}$ 网, 其中之一包含 $\{x_{1i}\}$ 中无穷多个元, 记为 $\{x_{2i}\}$, 显然 $d(x_{2i}, x_{2j}) < \frac{1}{2}$. …… 如此下去得到可数多个序列, 每个序列是前面一个的子序列. 选取对角线上的元素 $\{x_{nn}\}$, 它是 $\{x_n\}$ 的子序列, 由我们的取法知道, $\{x_{nn}\}$ 是 Cauchy 序列.

(2) 若 A 不是完全有界的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, A 不具有有限 ε_0 网. 换句话说任取 $x_1 \in A$, $O(x_1, \varepsilon_0) \not\supset A$, 故有 $x_2 \in A \backslash O(x_1, \varepsilon_0)$, $\bigcup\limits_{i=1}^{2} O(x_i, \varepsilon_0) \not\supset A$. 从而又有 $x_3, \cdots\cdots$ 如此得到序列 $\{x_n\}$, $d(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0$, $m \neq n$, $\{x_n\}$ 不包含任何 Cauchy 子序列, 矛盾.

推论 1.4.2　设 X 是度量空间, $A \subset X$.

(1) 紧集必是相对紧集, 相对紧集必是完全有界集.

(2) 若 A 是闭集, 则 A 紧当且仅当 A 相对紧.

(3) 若 X 完备, 则 A 相对紧当且仅当 A 完全有界.

(4) 整个空间 X 是紧的当且仅当 X 完备并且完全有界.

推论 1.4.3　在有限维线性赋范空间中 A 是相对紧集当且仅当 A 是有界集, A 是紧集当且仅当 A 是有界闭集.

证明　在有限维空间中, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 任一有界无穷序列必有收敛子序列, 所以是相对紧集. 反过来, 相对紧集是完全有界的, 完全有界集又是有界的, 所以前一个结论成立. 由此, 后一个结论成为显然的.

定理 1.4.4　设 X 是紧度量空间, $T: X \to Y$ 是连续映射 (不必线性), 则

(1) $T(X)$ 是紧集.

(2) T 在 X 上一致连续, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得

$$d(T(x), T(x')) < \varepsilon, \quad \forall x, x' \in X, \quad d(x, x') < \delta.$$

(3) 若 $Y = \mathbf{R}$, 则 T 在 X 上可以达到上、下确界.

证明　(1) 若 $y_n \in T(X)$, 不妨设 $y_n = T(x_n)$, $x_n \in X$, $n \geqslant 1$. X 紧, 故存在 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0 \in X$, 记 $y_0 = T(x_0)$. T 连续, 故

$$y_{n_k} = T(x_{n_k}) \to T(x_0) = y_0 \in T(X).$$

由定理 1.4.1, $T(X)$ 紧.

(2) 若不然, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall n, \exists x_n, x_n' \in X$, $d(x_n, x_n') < n^{-1}$, 但 $d(T(x_n), T(x_n')) \geqslant \varepsilon_0$. A 紧, 故存在 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0 \in X$, 从而 $x_{n_k}' \to x_0$. 由 T 在 x_0 的连续性,

$$T(x_{n_k}) \to T(x_0), \qquad T(x_{n_k}') \to T(x_0),$$

$$d(T(x_{n_k}), T(x_{n_k}')) \leqslant d(T(x_{n_k}), T(x_0)) + d(T(x_0), T(x_{n_k}')) \to 0,$$

这与 $d(T(x_{n_k}), T(x_{n_k}')) \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾.

(3) 由 (1), $T(X)$ 在 $\mathbf{R}$ 中紧, 故 $T(X)$ 是有界集. 记 $a=\sup T(X)$, 则存在 $x_n\in X$, $T(x_n)\to a$. $\{x_n\}$ 中有子列 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k}\to x_0\in X$, 所以 $T(x_{n_k})\to T(x_0)$, $T(x_0)=a$. 下确界情况同样证明.

现在我们来介绍集合可分性的概念.

定义 1.4.2 设 X 是度量空间, $A\subset X$. 称集合 A 是可分的, 若存在可数集 $B\subset X$ 使得 $\overline{B}\supset A$. 当 X 本身可分时, 称 X 是可分空间.

命题 1.4.1 紧集、相对紧集和完全有界集都是可分的.

证明 只需证明完全有界集可分. 取 $\varepsilon_k\downarrow 0$, 设 $x_1^{(k)},\cdots,x_{n_k}^{(k)}$ 是 A 的有限 ε_k 网, 令 $B=\{x_i^{(k)}:\ k\geqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n_k\}$, 则 B 是可数集并且 $\forall x\in A$, 有 $x\in O(x_i^{(k)},\varepsilon_k)$, 故 $x_i^{(k)}\to x$, 于是 $\overline{B}\supset A$.

例 1.4.2 空间 c_0, $l^p(1\leqslant p<\infty)$, $P[a,b]$, $C[a,b]$, $L^p[a,b](1\leqslant p<\infty)$ 都是可分的.

考虑集合 $B=\{(r_1,\cdots,r_n,0,\cdots):\ r_i\in\mathbf{Q},n\geqslant 1\}$, 即 B 是由至多有限多个坐标不为 0, 并且每个坐标都是有理数的元素构成. 易知 B 是可数集. $\forall x=(x_n)\in c_0$ 和 $\varepsilon>0$, 由于 $x_n\to 0$, 先取 n_0 使得 $|x_n|<\varepsilon$, $\forall n>n_0$. 再取有理数 $r_1,\cdots,r_{n_0}$ 使得 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n_0}|x_i-r_i|<\varepsilon$. 记 $y=(r_1,\cdots,r_{n_0},0,\cdots)$, 则 $y\in B$ 并且

$$\|x-y\|=\max_{i\geqslant 1}|x_i-y_i|\leqslant\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_0}|x_i-r_i|,\max_{i>n_0}|x_i|\}<\varepsilon.$$

这说明 B 在 c_0 中是稠密的, c_0 可分.

对于 l^p, 若 $x=(x_n)\in l^p$, 先取 n_0 使 $\sum\limits_{i=n_0+1}^{\infty}|x_n|^p<\varepsilon^p$, 再取有理数 $r_1,\cdots,r_{n_0}$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n_0}|x_i-r_i|^p<\varepsilon^p$, 仍记 $y=(r_1,\cdots,r_{n_0},0,\cdots)$, 注意此时 $y\in l^p$ 并且

$$\|x-y\|_p^p\leqslant\sum_{i=1}^{n_0}|x_i-r_i|^p+\sum_{i=n_0+1}^{\infty}|x_n|^p<2\varepsilon^p,$$

由此知道 l^p 是可分的.

对于 $P[a,b]$, 容易知道有理系数多项式的全体是 $P[a,b]$ 中的可数稠密子集, 所以 $P[a,b]$ 可分. 根据 Weierstrass 定理, $C[a,b]$ 中的每个元 (连续函数) 可用多项式一致逼近, 实际上即是依照 $C[a,b]$ 中的范数逼近. 所以 $P[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密, 并且当 A 在 B 中稠密, B 在 C 中稠密时, A 一定在 C 中稠密. 于是有理系数多项式的全体在 $C[a,b]$ 中稠密, $C[a,b]$ 是可分的. 最后根据 Lyzin 定理, $C[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密, 于是 $L^p[a,b]$ 是可分的.

例 1.4.3　l^∞, $L^\infty[a,b]$ 不是可分空间.

这里仅证明 l^∞. 考虑 l^∞ 中坐标仅由 0, 1 两个数组成的序列全体构成的集合 A. 注意 $[0,1)$ 中的实数的二进位表示实现了 A 与 $[0,1)$ 之间的一一对应. 所以 A 具有连续统的势.

现在若可数集 B 在 l^∞ 中稠密, 则 B 中存在点 x_0 使得以 x_0 为中心, $\dfrac{1}{2}$ 为半径的球 $O\left(x_0, \dfrac{1}{2}\right)$ 至少包含 A 中两个不同点, 而 A 中的不同点 y_1, y_2 在 l^∞ 中的距离等于 1, 所以

$$1 = d(y_1, y_2) \leqslant d(y_1, x_0) + d(y_2, x_0) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

矛盾说明 l^∞ 不可分.

让我们回到紧性的讨论. 有时候知道空间中某个子集是紧集或相对紧集是很有用的.

例 1.4.4　空间 $C(\Omega)$ 中的相对紧集.

设 (Ω, d) 是紧度量空间, $C(\Omega)$ 是 Ω 上定义的标量值连续函数全体. 定义

$$||x|| = \sup_{t\in\Omega} |x(t)|, \quad \forall x \in C(\Omega). \tag{1.4.1}$$

容易验证, $||\cdot||$ 是 $C(\Omega)$ 上的范数并且 $C(\Omega)$ 是 Banach 空间.

$C(\Omega)$ 的子集 K 称为是等度连续的函数族, 若 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得 $\forall x \in K$,

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon, \quad \forall t_1, t_2 \in \Omega, \quad d(t_1, t_2) < \delta. \tag{1.4.2}$$

定理 1.4.5 (Arzela-Ascoli)　$K \subset C(\Omega)$ 是相对紧集当且仅当 K 是 $C(\Omega)$ 中的范数有界的等度连续函数族.

证明　充分性. 由于 $C(\Omega)$ 的完备性只须证明 K 完全有界.

$\forall\varepsilon > 0$, 由等度连续性, 取 $\delta > 0$ 使当 $d(t, t') < \delta$ 时, $|x(t) - x(t')| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Ω 是紧空间, 故有有限 δ 网 $t_1, \cdots, t_n$, 使得 $\forall t \in \Omega, \exists i, d(t, t_i) < \delta$. 此时

$$|x(t) - x(t_i)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.4.3}$$

记 $\tilde{K} = \{\tilde{x} = (x(t_1), \cdots, x(t_n)) : x(t) \in K\}$, $\tilde{K}$ 是 Φ^n 中的点集, 并且对于每个 $\tilde{x} \in \tilde{K}$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x(t_i)|^2} \leqslant \sqrt{n} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x(t_i)| \leqslant \sqrt{n} \sup_{x\in K} \sup_{t\in\Omega} |x(t)| < \infty,$$

即 $\tilde{K}$ 是 Φ^n 中的有界集, 从而是完全有界集 (推论 1.4.3).

对于 ε, $\tilde{K}$ 有有限 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网 $\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_k$. 我们证明, 与 $\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_k$ 相应的函数 $x_1,\cdots,x_k$ 是 K 的 ε 网.

实际上, $\forall x\in K$, 对应的 $\tilde{x}=(x(t_1),\cdots,x(t_n))\in\tilde{K}$, 从而有 $\tilde{x}_j=(x_j(t_1),\cdots,x_j(t_n))$ 使得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_j(t_i)-x(t_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{3}$. 此时 $\forall i$,

$$|x_j(t_i)-x(t_i)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{1.4.4}$$

$\forall t\in\Omega$, 取 t_i, 使得 $d(t,t_i)<\delta$, 则由 (1.4.3), (1.4.4),

$$\begin{aligned}|x(t)-x_j(t)|&\leqslant|x(t)-x(t_i)|+|x(t_i)-x_j(t_i)|+|x_j(t_i)-x_j(t)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以

$$||x-x_j||\ =\max_{t\in\Omega}|x(t)-x_j(t)|<\varepsilon,$$

即 $x\in O(x_j,\varepsilon)$. K 是完全有界的.

必要性. 设 K 是 $C(\Omega)$ 中的相对紧集, 则 K 是范数有界集. 为了证明 K 等度连续, $\forall\varepsilon>0$, 设 $x_1,\cdots,x_k$ 为 K 的 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网, 每个 $x_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 在紧集 Ω 上连续, 从而一致连续. 于是存在 $\delta>0$, 当 $d(t,t')<\delta$ 时,

$$|x_i(t)-x_i(t')|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(1\leqslant i\leqslant k). \tag{1.4.5}$$

对于每个 $x\in K$,

$$\begin{aligned}|x(t)-x(t')|&\leqslant|x(t)-x_i(t)|+|x_i(t)-x_i(t')|+|x_i(t')-x(t')|\\&<2||x-x_i||+|x_i(t)-x_i(t')|<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

定理 1.4.6 设 X,Y 是线性赋范空间, $T:X\to Y$ 是到上的线性映射, 则 T 是 X 到 Y 上的同构当且仅当存在正数 a,b 使得

$$a||x||\ \leqslant\ ||Tx||\ \leqslant b||x||,\qquad\forall x\in X. \tag{1.4.6}$$

若 X 与 Y 同构, 当一个是完备空间时, 另一个也是.

证明 充分性. 若不等式 (1.4.6) 成立, 则当 $Tx_1=Tx_2$ 时,

$$a||x_1-x_2||\ \leqslant\ ||T(x_1-x_2)||=0,$$

从而 $x_1 = x_2$, T 是一一的. 若 $x_n, x \in X$, $x_n \to x$, 则

$$\|Tx_n - Tx\| \leqslant b\|x_n - x\| \to 0, \qquad Tx_n \to Tx,$$

T 是连续的. 若 y_n, $y \in Y$, $y_n \to y$, 不妨设 $y_n = Tx_n$, $y = Tx$, 则

$$a\|T^{-1}y_n - T^{-1}y\| = a\|x_n - x\| \leqslant \|Tx_n - Tx\| = \|y_n - y\| \to 0,$$

于是 $T^{-1}y_n \to T^{-1}y$, T^{-1} 连续. 总之 T 是 X 到 Y 上的同构.

必要性. 设 T 是从 X 到 Y 上的同构映射, 若不存在 $b > 0$ 使得 $\|Tx\| \leqslant b\|x\|, \forall x \in X$, 此时 $\forall n$, 必有 $x_n \in X$, $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$. 令 $x'_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}\|x_n\|}$, 则 $\|x'_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, 从而 $x'_n \to 0$. 但

$$\|Tx'_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{\sqrt{n}\|x_n\|} > \sqrt{n} \to \infty,$$

T 不是连续的. 矛盾即证明存在 $b > 0$, $\|Tx\| \leqslant b\|x\|$, $\forall x \in X$. 同样地由 T^{-1} 连续, 存在 $a > 0$, $\|T^{-1}y\| \leqslant \dfrac{1}{a}\|y\|$, $\forall y \in Y$, 令 $y = Tx$ 即得 $a\|x\| \leqslant \|Tx\|$.

最后的结论是明显的.

线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 称为是彼此等价的, 若存在 a, $b > 0$, 使得

$$a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1, \qquad \forall x \in X. \tag{1.4.7}$$

由上面定理及其证明可以得出以下推论.

推论 1.4.4 线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是彼此等价的, 若任何 $x_n \in X$, $\|x_n\|_1 \to 0$ 当且仅当 $\|x_n\|_2 \to 0$.

定理 1.4.7 设 X 是线性赋范空间, Y 是 X 的线性子空间, $\dim Y = n$, Φ^n 是 n 维欧氏空间. 若 $F : \Phi^n \to Y$ 是到上的 (或一一的) 线性映射, 则 F 是 Φ^n 到 Y 上的同构并且 Y 是 X 的闭子空间.

证明 令 $e_k = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{k}, 0, \cdots, 0) \in \Phi^n$, $k = 1, \cdots, n$, $F(e_k) = y_k$. 则 $\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Phi$,

$$F\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k. \tag{1.4.8}$$

由于 F 是一一映射, $F(x) = 0$ 时必有 $x = 0$, 于是 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, 这说明 $y_1, \cdots, y_n$ 线性无关, 所以 F 是到上的 (另一方面, 若 F 不是一一的, 则 $y_1, \cdots, y_n$ 线性相关, F 必不是到上的).

由于

$$\left\|F\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\,\|y_k\|$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\|y_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4.9}$$

假设 $b=\left(\sum_{k=1}^{n}\|y_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 则

$$\|F(\alpha)\| \leqslant b\|\alpha\|, \qquad \forall\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\Phi^n,$$

所以 F 是连续的.

反过来考虑函数

$$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\left\|F\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right)\right\|. \tag{1.4.10}$$

f 是 n 元连续函数. $E=\left\{\alpha:\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2=1\right\}$是 Φ^n 中的有界闭集, 从而是紧集, 由定理 1.4.4(3), f 可以达到下确界. 不妨设

$$\beta=f(\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0)=\inf\{f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in E\}.$$

因为 $y_1,\cdots,y_n$ 线性无关, 仅当 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ 时 $f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=0$, 但 $(0,\cdots,0)$ 不在 E 上, 故 $\beta>0$. $\forall(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\Phi^n,(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\neq 0$, 令

$$\alpha_k'=\alpha_k\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

则 $(\alpha_1',\cdots,\alpha_n')\in E$, 从而 $\left\|F\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k' e_k\right)\right\|\geqslant\beta$ 或者

$$\left\|F\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right)\right\| \geqslant \beta\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即 $\beta\|\alpha\| \leqslant \|F(\alpha)\|, \forall\alpha\in\Phi^n$.

由定理 1.4.6, F 是从 Φ^n 到 Y 上的同构映射. 由于 Φ^n 完备, 故 Y 完备. 作为 X 的子空间, Y 是闭子空间. 证毕.

设 X, Y 是线性赋范空间, $\dim X = \dim Y = n$, 则存在到 X 和 Y 上的一一映射 $T : \Phi^n \to X$ 和 $F : \Phi^n \to Y$ 使得 (1.4.7) 成立. 由此我们得到如下推论.

推论 1.4.5 (1) 同维数的有限维线性赋范空间彼此同构.

(2) 有限维线性空间上的任意两个范数等价.

(3) 任何有限维线性赋范空间完备. 线性赋范空间的任何有限维线性子空间是闭的.

最后, 让我们证明有限维空间的一个特征.

引理 1.4.1 (Riesz) 设 X 是线性赋范空间, $E \subset X$ 是闭线性子空间, 若 $E \neq X$, 则 $\forall \varepsilon\ (0 < \varepsilon < 1)$, 存在 $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ 使得 x_0 到 E 的距离

$$d(x_0, E) = \inf_{x \in E} d(x_0, x) > \varepsilon. \tag{1.4.11}$$

证明 取 $\tilde{x} \in X \backslash E$, E 闭, 故 $d(\tilde{x}, E) = d > 0$. 因为 $d/\varepsilon > d$, 存在 $x' \in E$, 使得 $\|\tilde{x} - x'\| < d/\varepsilon$. 令

$$x_0 = \frac{\tilde{x} - x'}{\|\tilde{x} - x'\|},$$

则 $\|x_0\| = 1$. $\forall x \in E$, E 为线性子空间, 故 $x' + \|\tilde{x} - x'\| x \in E$, 此时

$$\begin{aligned}\|x_0 - x\| &= \left\| \frac{\tilde{x} - x'}{\|\tilde{x} - x'\|} - x \right\| = \frac{1}{\|\tilde{x} - x'\|} \|\tilde{x} - x' - \|\tilde{x} - x'\| x\| \\ &> d/(d/\varepsilon) = \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $d(x_0, E) > \varepsilon$.

定理 1.4.8 设 X 是线性赋范空间, 则以下条件等价:

(1) $\dim X < \infty$.

(2) X 中每个有界闭集是紧集.

(3) X 的闭单位球 $S(X) = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ 是紧集.

(4) X 的单位球面 $S_p(X) = \{x : \|x\| = 1\}$ 是紧集.

证明 只有 (4)⇒(1) 是需要证明的. 设 $\dim X = \infty$, 取 $x_1 \in X$, $\|x_1\| = 1$, 记 $Y_1 = \mathrm{span}\{x_1\}$, 则 $\dim Y_1 = 1$. 由定理 1.4.7, Y_1 是闭线性子空间, $Y_1 \neq X$. 由 Riesz 引理, 存在 $x_2 \in X$, $\|x_2\| = 1$, $d(x_2, Y_1) > \dfrac{1}{2}$. 记 $Y_2 = \mathrm{span}\ \{x_1, x_2\}$, 则 $\dim Y_2 = 2$, Y_2 闭并且 $Y_2 \neq X$. 从而又有 x_3, $\|x_3\| = 1$, $d(x_3, Y_2) > \dfrac{1}{2}, \cdots\cdots$ 由此得到序列 $\{x_n\}$, $x_n \in S_p(X)$, 当 $m \neq n$ 时, $\|x_m - x_n\| > \dfrac{1}{2}$. $\{x_n\}$ 没有收敛子序列. 故 $S_p(X)$ 不是紧集, 矛盾. 于是 $\dim X < \infty$. 证毕.

1.5 积空间与商空间

设 $(X_i;\|\cdot\|_i), 1\leqslant i\leqslant n$ 是一组线性赋范空间, 令

$$X=\{x=(x_1,\cdots,x_n):x_i\in X_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\},$$

记为 $X=X_1\times\cdots\times X_n$. X 中元素的线性运算与序列空间中一样定义, 则 X 是线性空间. 若此外定义

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}},\qquad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|x\|_\infty=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\|_i,$$

则 $(X,\|\cdot\|_p)$ 是线性赋范空间. 这些都可以由定义直接验证.

定理 1.5.1 设 X_i, X 如上, 则 X 是线性赋范空间并且

(1) X 是完备的当且仅当每个 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 完备.

(2) 每个映射 $P_i:X\to X_i, x|\to x_i$ 是连续的 $(i=1,\cdots,n)$.

证明 (1) 先设每个 X_i 是完备的, 假定 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$ 是 X 中的 Cauchy 序列, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists k_0$ 使得 $s,k\geqslant k_0$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i^{(s)}-x_i^{(k)}\|_i^p=\|x^{(s)}-x^{(k)}\|_p^p<\varepsilon^p.$$

特别地对于每个 i,

$$\|x_i^{(s)}-x_i^{(k)}\|_i<\varepsilon. \tag{1.5.1}$$

这说明 $\{x_i^{(k)}:k\geqslant 1\}$ 是 X_i 中的 Cauchy 序列. 由 X_i 的完备性, 不妨设 $\|x_i^{(k)}-x_i\|_i\to 0$, 这里 $x_i\in X_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 记 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 在 (1.5.1) 中固定 $k\geqslant k_0$, 令 $s\to\infty$, 则有

$$\|x_i-x_i^{(k)}\|_i\leqslant\varepsilon. \tag{1.5.2}$$

不妨设对于每个 i, 当 $k\geqslant k_0$ 时 (1.5.2) 均成立, 则

$$\|x^{(k)}-x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^{(k)}-x_i\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\sqrt[p]{n}\,\varepsilon,\qquad 1\leqslant p<\infty.$$

总之, $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$. 故 X 完备.

反之, 设 X 完备, 我们证明每个 X_i 完备. 注意

$$E_i = \{(\underbrace{0, \cdots, 0,}_{i} x_i, 0, \cdots, 0) : x_i \in X_i\}$$

是 X 的线性子空间并且 E_i 与 X_i 等距同构, 即

$$||(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)||_p = ||x_i||_i, \qquad \forall x_i \in X_i.$$

剩下只需证明 E_i 是 X 的闭子空间.

设 $x^{(k)} = (0, \cdots, 0, x_i^{(k)}, 0, \cdots, 0) \in E_i, x^{(k)} \to x$, 不妨设 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, 其中 $x_i \in X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. 由于

$$||x^{(k)} - x||_p^p = ||x_i^{(k)} - x_i||_i^p + \sum_{j \neq i} ||x_j||_j^p \to 0,$$

此时必有 $j \neq i$, $x_j = 0$, 同时 $||x_i^{(k)} - x_i||_i \to 0$. 这说明 $x_i \in E_i$, E_i 闭.

$p = \infty$ 的情况可类似证明.

(2) 由于当 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in X$ 时

$$||P_i x - P_i y||_i = ||x_i - y_i||_i \leqslant ||x - y||_p, \tag{1.5.3}$$

所以 P_i 连续 $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

上面我们只对有限多个空间定义了它们的乘积, 实际上对于无穷多个也可以加以定义, 并且定理 1.5.1 仍成立, 读者不妨证明之.

现在我们转到商空间.

定理 1.5.2 设 X 是线性空间, $E \subset X$ 是线性子空间.

(1) 若规定 $x \sim y$ 当且仅当 $x - y \in E$, “$\sim$” 是 X 中的等价关系. 定义

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}, \qquad \alpha \overline{x} = \overline{\alpha x},$$

则 $X/E\ (= X/\sim)$ 是线性空间 (称 X/E 是 X 关于 E 的商空间).

(2) 若 X 是线性赋范空间, E 是 X 的闭子空间, 则 X/E 是以

$$||\overline{x}|| = \inf_{y \in \overline{x}} ||y|| \tag{1.5.4}$$

为范数的线性赋范空间.

(3) 若 X 是 Banach 空间, E 是 X 的闭线性子空间, 则 X/E 是 Banach 空间.

证明 (1) $\forall x \in X, x-x \in E$, 故 $x \sim x$. 由于 E 是线性子空间, 当 $x-y \in E$ 时 $y-x \in E$, 故 $x \sim y$, 则 $y \sim x$. 若 $x-y \in E, y-z \in E$, 则 $x-z=(x-y)+(y-z) \in E$, 故 $x \sim y, y \sim z$ 时 $x \sim z$. 所以 "$\sim$" 是等价关系.

记 $\overline{x}=\{x+y: y \in E\}$, $X/E=\{\overline{x}: x \in X\}$, 并且规定

$$\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}, \qquad \alpha\overline{x}=\overline{\alpha x}.$$

这些运算有确定的意义. 例如, 若 $\overline{x}=\overline{x}_1$, $\overline{y}=\overline{y}_1$, 则 $x-x_1 \in E$, $y-y_1 \in E$, 从而

$$(x+y)-(x_1+y_1) \in E, \qquad \alpha x-\alpha x_1 \in E,$$

于是 $\overline{x+y}=\overline{x_1+y_1}$, $\overline{\alpha x}=\overline{\alpha x_1}$. 依照定义可验证 X/E 是线性空间, 其中 $\overline{o}=E$.

(2) 对于每个 $\overline{x} \in X/E$, 以 (1.5.3) 定义 $\|\cdot\|$, 则 $\|\cdot\|$ 是 X/E 上的范数. 实际上 $\|\overline{x}\| \geqslant 0$, 若 $\|\overline{x}\|=0$, 则 $\exists\, y_n \in \overline{x}, \|y_n\| \to 0$, 故 $y_n-x=z_n \in E$. $z_n=y_n-x \to -x$, E 闭, 于是 $x \in E$, $\overline{x}=E=\overline{o}$.

对于每个 $\overline{x} \in X/E$,

$$\|\alpha\overline{x}\| = \|\overline{\alpha x}\| = \inf_{y\in\overline{x}}\|ay\| = |\alpha| \inf_{y\in\overline{x}}\|y\| = |\alpha|\, \|\overline{x}\|.$$

最后, $\forall\overline{x},\overline{y} \in X/E$, 由定义, $\exists\, x_n \in \overline{x}, \|x_n\| < \|\overline{x}\|+\dfrac{1}{n}$, 同时 $\exists\, y_n \in \overline{y}$, $\|y_n\| < \|\overline{y}\|+\dfrac{1}{n}$, 从而 $x_n+y_n \in \overline{x}+\overline{y}$, 且

$$\|\overline{x}+\overline{y}\| \leqslant \|x_n+y_n\| \leqslant \|x_n\|+\|y_n\| \leqslant \|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|+\frac{2}{n}.$$

令 $n \to \infty$, 得

$$\|\overline{x}+\overline{y}\| \leqslant \|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|.$$

于是 (1.5.3) 定义了 X/E 上的范数.

(3) 若 X 完备, E 闭, $\{\overline{x}_n\}$ 是 X/E 中的 Cauchy 序列. 取 $\varepsilon_k=\dfrac{1}{2^k}$, 则 $\exists n_k$ 使当 $n \geqslant n_k$ 时, $\|\overline{x}_n-\overline{x}_{n_k}\|<\dfrac{1}{2^k}$. 不妨设 n_k 单调增加. 记 $u_k=x_{n_k}$, 则 $\{\overline{u}_k\}$ 是 $\{\overline{x}_n\}$ 的子序列并且 $\|\overline{u}_{k+1}-\overline{u}_k\|<\dfrac{1}{2^k}$. 从而由 X/E 中范数的定义存在 $z_k \in E$ 使得

$$\|u_{k+1}-u_k+z_k\|<\frac{1}{2^k}.$$

记 $v_k=u_{k+1}-u_k+z_k$, 则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\|v_k\|<\infty$. X 完备, 故 $\exists v \in X$ 使得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}v_k=v$. 令 $u=v+u_1$. 现在证明 $\overline{x}_n \to \overline{u}$.

实际上由 $z_k \in E$, 故 $\forall n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k \in E$, $\overline{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k} = \overline{o}$,

$$\begin{aligned}||\overline{u}_{n+1} - \overline{u}|| &= ||\overline{u}_{n+1} - \overline{v} - \overline{u}_1|| \\ &\leqslant \left|\left|u_{n+1} - v - u_1 + \sum_{k=1}^{n} z_k\right|\right| = \left|\left|\sum_{k=1}^{n} v_k - v\right|\right| \to 0.\end{aligned}$$

于是 $\overline{u}_k \to \overline{u}$, 即 $\overline{x}_{n_k} \to \overline{u}$. $\{\overline{x}_n\}$ 是 Cauchy 序列, 其中有子列 $\{\overline{x}_{n_k}\}$ 收敛, 故 $\{\overline{x}_n\}$ 收敛并且 $\overline{x}_n \to \overline{u}$, 从而 X/E 完备.

定理 1.5.3 设 X 是线性赋范空间, E 是 X 的闭线性子空间. 定义商映射

$$\pi : X \to X/E, \qquad x| \to \overline{x},$$

则

(1) π 是到上的连续映射.

(2) π 将 X 中的开集映射为 X/E 中的开集.

证明 (1) π 是到上的和连续的直接由定义得出. 事实上, 由 X/E 中范数定义, 若 $\pi(x) = \overline{x}$, 则

$$||\pi(x)|| = ||\overline{x}|| = \inf_{y \in \overline{x}} ||y|| \leqslant ||x||. \tag{1.5.5}$$

(2) 考虑空间 X 中的球 $O(0,r)$ 和 X/E 中的球 $O(\overline{0},r)$, 后者即集合 $\{\overline{x} \in X/E : ||\overline{x}|| < r\}$. 首先对于每个 $\overline{x} \in O(\overline{0},r)$, 由 $||\overline{x}||$ 的定义, 存在 $x \in O(0,r)$ 使得 $\pi(x) = \overline{x}$. 这说明

$$O(\overline{0},r) \subset \pi(O(0,r)). \tag{1.5.6}$$

设 $V \subset X$ 是开集, 现证 $\pi(V)$ 是 X/E 中的开集. 对于任一点 $\overline{x} \in \pi(V)$, 存在 $x \in V$, 使得 $\pi(x) = \overline{x}$. V 是开集, 故有 $r > 0$ 使得 $O(0,r) \subset V$. 此时由集合的线性运算, $O(x,r) = x + O(0,r)$, 从而由 (1.5.5),

$$\begin{aligned}\overline{x} + O(\overline{0},r) &\subset \pi(x) + \pi(O(0,r)) = \pi(x + O(0,r)) \\ &= \pi(O(x,r)) \subset \pi(V),\end{aligned}$$

所以 $\overline{x}$ 是 $\pi(V)$ 的内点. $\overline{x}$ 是任意的, 故 $\pi(V)$ 是开集.

习 题 1

1. 在实数轴 $\mathbf{R}$ 上, 令 $d(x,y) = |x-y|^p$, 当 p 为何值时, $\mathbf{R}$ 是度量空间, 何时是赋范空间.

2. 若 (X,d) 是度量空间, 则 $d=\min(d,1)$, $d=\dfrac{d}{1+d}$ 也使 X 成为度量空间.

3. 设 A 是复平面 $\mathbf{C}$ 的单位圆盘 $D=\{z\in C:|z|<1\}$ 中的解析函数全体, 定义

$$d(f,g)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\max_{|z|\leqslant 1-\frac{1}{i}}\frac{|f(z)-g(z)|}{1+|f(z)-g(z)|},\qquad \forall f,g\in A,$$

则 (A,d) 是度量空间, 其中的收敛性等价于内闭一致收敛.

4. 验证欧氏空间 Φ^n 中点列的收敛性等价于依坐标收敛. 空间 s 也是这样.

5. 证明在线性空间 X 中,

(1) 任意多个凸集之交是凸集.

(2) 凸集 E 的倍集 kE $(k\in\Phi)$ 是凸集.

(3) 凸集经平移是凸集.

(4) 若 X 还是赋范空间, E 是凸集, 则 $\overline{E}$, E^0 是凸集.

(5) 举例说明两凸集之并未必是凸集.

6. 设 X,Y 是线性空间, $T:X\to Y$ 是线性映射, 则

(1) 若 $A\subset X$ 是凸集, 则 $T(A)\subset Y$ 是凸集.

(2) 若 $B\subset Y$ 是凸集, 则 $T^{-1}(B)$ 是凸集.

(3) T 是一一的当且仅当对于 X 中的每个线性无关集 E, $T(E)$ 是 Y 中的线性无关集.

7. 设 X 是线性赋范空间. 证明:

(1) 对于任何 $A,B\subset X$, $\overline{A}+\overline{B}\subset\overline{A+B}$.

(2) x_0+A 是开集 (闭集) 当且仅当 A 是开集 (闭集).

(3) A, B 中只要有一个是开集, $A+B$ 是开集.

(4) 若 $A^0\neq\varnothing$, 则 $A-A$ 以 0 为内点.

8. 证明离散度量空间 (例 1.1.7) 的下述性质:

(1) 任一集合 A 既是开集又是闭集.

(2) 若 $x_n\in X$, $x_n\to x$, 则存在 n_0 使得 $n\geqslant n_0$ 时, $x_n=x$.

9. 设 H 是内积空间, $x_n,x,y_n,y\in H$, 则当 $x_n\to x$, $y_n\to y$ 时, $(x_n,y_n)\to(x,y)$, 即内积关于两变元连续.

10. 应用 Hölder 不等式证明:

(1) 若 f,g 是 (Ω,Σ,μ) 上定义的非负可测函数, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, 则

$$\int_\Omega f^\alpha g^{1-\alpha}\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\right)^\alpha\left(\int_\Omega g\mathrm{d}\mu\right)^{1-\alpha}.$$

(2) 若 $p,q,r>0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=1$, f,g,h 分别是 L^p,L^q,L^r 中的元, 则

$$\left|\int_\Omega fgh\,\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r.$$

(3) 若 $p,q,r>0$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, $f\in L^p$, $g\in L^q$, 则

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

11. 若 $f\in L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$, 证明:

(1) $\|f\|_\infty=\inf\{C>0:\mu\{|f|>C\}=0\}=\sup\{C>0:\mu\{|f|>C\}>0\}$.

(2) $\|f\|_\infty=\lim\limits_{p\to+\infty}\|f\|_p$.

(3) $\|f\|_\infty=\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{\|f\|_{p+1}^{p+1}}{\|f\|_p^p}$.

12. 设 $\mu(\Omega)>0, p\neq 2$, 证明 l^p, $L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$ 不是内积空间.

13. 设 H 是内积空间, $x_n,y_n\in H$, $\|x_n\|=\|y_n\|=1$, $\|x_n+y_n\|\to 2$, 则 $\|x_n-y_n\|\to 0$.

14. 证明空间 $S,s,c_0,c,l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$, $V_0[a,b]$ 的完备性.

15. $C_0(-\infty,+\infty)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上, 当 $|x|\to\infty$ 时 $f(x)\to 0$ 的连续函数全体, 依照函数空间的线性运算成为线性空间. 定义

$$\|f\|=\max_{-\infty<t<\infty}|f(t)|,\qquad \forall f\in C_0(-\infty,+\infty).$$

证明 $C_0(-\infty,+\infty)$ 是 Banach 空间.

16. 设 $H^2(D)$ 是在复平面的开子集 D 中解析并且平方可积的复函数全体, 即 $\forall f\in H^2(D)$, $\iint_D|f(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$(这里 $z=x+\mathrm{i}y$). 规定

$$(f,g)=\iint_D f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad \forall f,g\in H^2(D),$$

则 $H^2(D)$ 是 Hilbert 空间.

17. 设 X 是 $[a,b]$ 上连续函数的全体, $1\leqslant p<\infty$,

$$\|x\|_p=\left(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\qquad \forall x\in X.$$

证明 $\|\cdot\|_p$ 是 X 上的范数, 但 $(X,\|\cdot\|_p)$ 不是完备的. 验证 X 的完备化空间是 $L^p[a,b]$.

18. 证明完备度量空间的每个闭子空间是完备子空间. 度量空间的每个完备子空间是闭子空间.

19. 设 X 是线性赋范空间, 若 X 有可数无穷 Hamel 基, 则 X 不可能是完备的.

20. 设 X 是 Banach 空间, $A\subset X$ 是有界集, $\alpha_n\in\Phi$ 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$. 则对于任意的 $x_n\in A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 是收敛级数.

21. 设 X 是度量空间, 则以下条件等价:

(1) X 具有 Baire 性质.

(2) X 中可数多个无处稠密闭集合之并其内点是空集.

(3) X 中每个非空开集是第二纲的.

(4) X 中每个第一纲集合的余集在 X 中稠密.

22. 点集 $M=[0,1]$ 以实轴上的通常度量构成完备度量空间. 证明:

(1) 每个单点 $x\in M$ 是 M 中的无处稠密集.

(2) 证明 $[0,1]$ 不是可数集.

23. 设 X 是度量空间, 证明集合 E 在 X 中稠密当且仅当 $\forall\varepsilon>0$, $X=\bigcup\limits_{x\in E}O(x,\varepsilon)$.

24. 设 X, Y 是度量空间, 则 $T:X\to Y$ 在 X 上连续当且仅当对于每个集合 $A\subset X$, $T(\overline{A})\subset\overline{T(A)}$.

25. 设 (X,d) 是度量空间, $x\in X$, $E\subset X$, x 到 E 的距离是 $d(x,E)$, 证明:

(1) E 是闭集当且仅当 $\forall x\in X$, $d(x,E)=0$ 时 $x\in E$.

(2) 若 E 是闭集, 则 $x\overline{\in}E$ 当且仅当 $d(x,E)>0$.

26. 设 $|\lambda|<1$, 考虑 $C[0,1]$ 上的积分方程

$$x(s)=\lambda\int_0^1\sin x(t)\mathrm{d}t+y(s),$$

其中 $y\in C[0,1]$, 证明此方程存在唯一连续解.

27. 设 $l_n^\infty=\{x=(x_1,\cdots,x_n):x_i\in\mathbf{R}\}$, $\|x\|=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, $\forall x\in l_n^\infty$. 定义线性算子 $T:l_n^\infty\to l_n^\infty$, T 由 (1.3.7) 表达, 证明当 $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|<1$ 时, 算子方程 $Tx-x=y$ 有唯一解.

28. 考虑 $C[a,b]$ 上的非线性积分方程

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(t,s,x(s))\mathrm{d}s=\varphi(t),$$

其中 $\varphi\in C[a,b]$, $K(t,s,\omega)$ 是 $[a,b]\times[a,b]\times\mathbf{R}$ 上的连续函数, 满足

$$|K(t,s,\omega_1)-K(t,s,\omega_2)|\leqslant b|\omega_1-\omega_2|,$$

证明当 $|\lambda|$ 足够小时, 此方程存在唯一解 $x_0\in C[a,b]$.

29. 举例说明定理 1.3.5 中的压缩映射改为满足 $d(Tx,Ty)<d(x,y)$ 的映射时, 结论不成立.

30. 证明在空间 l^∞ 中, 集合 $A=\{x=(x_n);|x_n|\leqslant n^{-1}\}$ 是完全有界的从而是紧的.

31. 设 X 是度量空间, 则下面两条等价:

(1)X 是紧空间; (2) 设 $\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 中的任一闭集族, 若 F_λ 具有有限交性质 (即其中任意有限个集合之交非空), 则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\neq\varnothing$.

32. 设 X 是度量空间, $A\subset X$ 是紧集, 则

(1) $\forall x\in X$, 存在 $y\in A$, 使得 $d(x,y)=d(x,A)$.

(2) $\exists x,y\in A$ 使得 $d(x,y)=\mathrm{diam}A$, 后者为 A 的直径.

(3) 若另有 $B \subset X$ 为闭集, 则 $A \bigcap B = \varnothing$ 当且仅当

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y) > 0.$$

(4) 举例说明, 当 A 是闭集时, (1) 可以不成立.

33. 若函数序列 $f_n(t)$ 在紧集 A 上等度连续并且点点收敛, 则 $f_n(t)$ 在 A 上一致收敛.

34. 证明空间 c 可分.

35. 证明在度量空间中, 若 A 在 B 中稠密, B 在 C 中稠密, 则 A 在 C 中稠密.

36. 利用 Arzela-Ascoli 定理证明 Montel 准则: 对于在复平面 $\mathbf{C}$ 的区域 U 中定义的一族全纯函数 K, 若 K 一致有界, 即 $\exists M > 0$ 使得

$$|f(z)| \leqslant M, \quad \forall z \in U, \quad f \in K,$$

则 K 是正规族, 即 K 中任一无穷序列存在子序列在 U 的任一紧子集上一致收敛.

37. 设 $E \subset C[a,b]$, E 有界且满足 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$ 阶 Lipschitz 条件:

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant C|t_1 - t_2|^{\alpha}, \quad t_1, t_2 \in [a,b], \quad \forall x \in E,$$

则 E 是 $C[a,b]$ 中的相对紧集.

38. $E \subset l^p (1 \leqslant p < \infty)$ 是相对紧集当且仅当 E 有界并且 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 n_0 使得

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon, \qquad \forall x = (x_n) \in E.$$

39. $E \subset L^p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 是相对紧集当且仅当 E 有界并且 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p \mathrm{d}t < \varepsilon^p, \quad 0 < h < \delta, \quad \forall x \in E,$$

其中 $x(t) = 0$, 若 $t \overline{\in} [a,b]$.

40. 设 X 是度量空间, $f : X \to \mathbf{R}$ 是实值函数, 称 f 在 X 上是下半连续的. 若 $\forall x \in X$, $x_n \to x$, 则 $f(x) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} f(x_n)$. 若 $-f$ 是下半连续的, 则称 f 上半连续. 证明:

(1) f 下半连续 $\Leftrightarrow$ 对于任意实数 a, $\{x : f(x) \leqslant a\}$ 是 X 中的闭集.

(2) f 连续 $\Leftrightarrow$ f 既上半连续又下半连续.

(3) 若 $f_i (i \geqslant 1)$ 下半连续, 则 $\sup\limits_{i \geqslant 1} f_i$ 下半连续并且 $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i$ 下半连续.

(4) 验证度量空间中每个开集的特征函数都是下半连续的.

(5) 若 X 是紧的, 则每个下半连续函数 f 有下界并且可以达到下确界.

第 2 章　有界线性算子与有界线性泛函

本章首先讨论线性算子的有界性和有界线性算子的空间, 然后叙述关于线性算子和线性泛函的若干基本定理, 它们是共鸣定理、开映射定理、闭图像定理以及 Hahn-Banach 延拓定理 (包括分析形式和几何形式). 这些定理在整个泛函分析理论中有着基本的重要作用. 本章还将介绍这些定理在 Fourier 分析、积分方程与微分方程适定问题以及逼近论、近似计算等方面的应用.

2.1　空间 $B(X,Y)$ 与 X^*

在 1.3 节中我们已经引入了线性算子与线性泛函的概念, 同时也介绍了算子的连续性概念. 现在让我们给出连续算子与连续泛函的形式上不同的定义, 在基本空间是赋范空间的情况下, 它们实际上是等价的.

定义 2.1.1　设 X,Y 是线性赋范空间, $T:X\to Y$ 是线性算子. T 称为是有界的, 若 T 将 X 中的每个有界集映射为 Y 中的有界集.

注意应该把这一定义中的有界算子的概念与数学分析中有界函数的概念加以区别, 后者是指在整个定义域中所取的值为有界的函数. 同时要把线性算子与初等数学中所定义的线性函数加以区别, 后者是指 $f(x)=kx+b$ 的所有函数. 但只有在 $b=0$ 的情况下, 它才是我们定义的线性算子.

定理 2.1.1　设 X,Y 是线性赋范空间, $T:X\to Y$ 是线性算子, 则下列诸条件等价:

(1) T 在某一点 x_0 连续.

(2) T 在 X 上连续.

(3) T 是有界算子.

(4) T 在 X 的某一点的有界邻域内有界. 特别地, T 在 X 的单位球中有界.

(5) 存在 $a>0$ 使得 $\|Tx\|\leqslant a\|x\|,\ \forall x\in X$.

若 $T=f$ 是 X 上的线性泛函, $f\neq 0$, 则以上条件还等价于:

(6) $N(f)=\{x\in X:f(x)=0\}$ 是 X 中的闭集.

(7) $N(f)$ 不在 X 中稠密.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 若 T 在 x_0 连续, 即 $\forall x_n \to x_0, Tx_n \to Tx_0$. 设 $y \in X$ 是任一点并且 $y_n \to y$, 令 $x_n = y_n - y + x_0$, 则 $x_n \to x_0$, 从而 $Tx_n = T(y_n - y + x_0) \to Tx_0$. T 是线性的, 故 $Ty_n - Ty + Tx_0 \to Tx_0$ 或者 $Ty_n \to Ty$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 若 T 不是有界的, 则存在有界集 $A \subset X, T(A)$ 在 Y 中不是有界的. 即 $\forall n$, $\exists x_n \in A$, 使得 $||Tx_n|| \geqslant n$. 不妨设 $||x_n|| \leqslant M$, 取 $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$, 则 $||y_n|| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{n}}$, $y_n \to 0$. 但 $||Ty_n|| = \dfrac{||Tx_n||}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n} \to \infty, T$ 在 0 点不是连续的, 矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (4). 显然.

(4) $\Rightarrow$ (5). 不妨设 T 在 $O(x_0, r) = \{x \in X : ||x - x_0|| < r\}$ 中有界, 其中 $x_0 \in X$, $r > 0$. 注意由于 T 是线性的,

$$rO(0,1) + x_0 = O(x_0, r),$$

其中 $O(0,1) = \{x \in X : ||x|| < 1\}$ 是单位球, 或者

$$O(0,1) = \frac{1}{r}(O(x_0, r) - x_0).$$

由此容易验证, T 在 $O(x_0, r)$ 上有界当且仅当 T 在 $O(0,1)$ 上有界. 此外由

$$O(0,1) \subset S(0,1) \subset O(0,2)$$

容易知道 T 在 $O(0,1)$ 上有界当且仅当 T 在闭球 $S(0,1)$ 上有界.

为证 (5), 假定在 $S(0,1)$ 上, $||Tx|| \leqslant a < \infty$. 则 $\forall x \in X$, $x \neq 0$, $\dfrac{x}{||x||} \in S(0,1)$, 从而

$$\left|\left|T\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| \leqslant a, \qquad ||Tx|| \leqslant a||x||.$$

$x = 0$ 时 $Tx = 0$, 此不等式仍成立. 总之得到 (5).

(5) $\Rightarrow$ (1). 由 (5) 中式子不难知道, $\forall x_n \in X, x_n \to 0$, 则 $||Tx_n|| \leqslant a||x_n|| \to 0$, 从而 T 在 0 点连续.

现在设 f 是 X 上的线性泛函, $f \neq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (6). 若 f 在 X 上连续, 由于 $\{0\}$ 是 Φ 中的闭集, 由定理 1.3.4, $N(f) = f^{-1}(0)$ 是 X 中的闭集.

(6) $\Rightarrow$ (7). 若 $N(f)$ 在 X 中稠密, 由 (6) 知道 $N(f) = \overline{N(f)} = X$. 但 $f \neq 0$, 矛盾.

(7) $\Rightarrow$ (3). 由 (7), $\exists x_0 \in X$, $r > 0$, $O(x_0, r) \bigcap N(f) = \varnothing$. 若 f 不是有界的, 由 (3) 与 (4) 等价性的证明知道, f 在任一点的有界邻域上都不是有界的. 特别

地 f 不在 $O(0,r)$ 上有界. 我们证明此时 $f(O(0,r)) = \Phi$. 实际上, $\forall\alpha \in \Phi$, 存在 $x' \in O(0,r), |f(x')| \geqslant |\alpha|$. 取 $x = \dfrac{\alpha}{f(x')}x'$, 则 $\|x\| = \dfrac{|\alpha|}{|f(x')|}\|x'\| \leqslant \|x'\| < r$, 并且 $f(x) = \alpha$, 故知之. 现在 $-f(x_0) \in \Phi$, 故 $\exists y \in O(0,r)$ 使得 $f(y) = -f(x_0)$, 于是 $f(x_0 + y) = 0, x_0 + y \in N(f)$. 但显然 $x_0 + y \in O(x_0, r)$, 所以 $O(x_0,r)\bigcap N(f) \neq \varnothing$, 与所设矛盾. 证毕.

在 1.3 节中我们已经提到过一些线性算子, 下面举出一些有界线性算子的例子.

例 2.1.1 设 $X = \Phi^n, Y = \Phi^m, T : X \to Y$ 是线性算子, 我们知道每个 $m\times n$ 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 定义一个线性映射 $T : X \to Y$.

反之, 对于每个线性算子 $T : \Phi^n \to \Phi^m$, 各取 Φ^n 与 Φ^m 的一组基 $e_1, \cdots, e_n$; $\mu_1, \cdots, \mu_m$, 令 $Te_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}\mu_j (i = 1, \cdots, n)$, 则得到 $m \times n$ 阶矩阵 $A = (a_{ij})$.

于是, 从 Φ^n 到 Φ^m 的线性算子可以与 $m \times n$ 阶矩阵对应起来. 特别地, 取 $m = 1$ 便得到 Φ^n 上的线性泛函, 它的一般形式是

$$f(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \qquad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Phi^n,$$

其中 $(a_1, \cdots, a_n)$ 是某一组标量.

定理 2.1.2 有限维线性赋范空间上的每个线性算子都是有界的.

证明 先设 $X = \Phi^n$, X 上的范数是欧氏范数, $e_1, \cdots, e_n$是 X 的一组基底, $\forall x \in X$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. $Te_1, \cdots, Te_n$ 是 Y 中确定的元. 设 $a = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 由 Hölder 不等式,

$$\|Tx\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,\|Te_k\| \leqslant a\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = a\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

由定理 2.1.1(5), T 有界. 此外由 1.4 节知道 X 上的任一范数都等价于欧氏范数, 故对于任一有限维空间结论成立.

例 2.1.2 (第二型 Fredholm 积分算子) 设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, $K(s,t)$ 在 $(\Omega \times \Omega, \Sigma \times \Sigma, \mu \times \mu)$ 上可测, $a^2 = \iint_{\Omega\times\Omega} |K(s,t)|^2 \mathrm{d}\mu(s)\mathrm{d}\mu(t) < \infty$.

定义 $T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, $Tx = y$, 其中

$$y(s) = \int_{\Omega} K(s,t)x(t)\mathrm{d}\mu(t), \qquad \forall x(t) \in L^2(\mu), \tag{2.1.1}$$

则 T 是有界线性算子.

首先由 Hölder 不等式, $\forall x \in L^2(\mu)$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |y(s)|^2 \mathrm{d}\mu(s) &= \int_\Omega \left|\int_\Omega K(s,t)x(t)\mathrm{d}\mu(t)\right|^2 \mathrm{d}\mu(s) \\ &\leqslant \int_\Omega \left|\int_\Omega |K(s,t)|^2 \mathrm{d}\mu(t) \int_\Omega |x(t)|^2 \mathrm{d}\mu(t)\right| \mathrm{d}\mu(s) \\ &\leqslant \iint_{\Omega\times\Omega} |K(x,t)|^2 \mathrm{d}\mu(t)\mathrm{d}\mu(s) \int_\Omega |x(t)|^2 \mathrm{d}\mu(t) < \infty.\end{aligned}$$

故 $y \in L^2(\mu)$. 其次, T 是线性的, 因为

$$\begin{aligned}T(\alpha x_1 + \beta x_2)(s) &= \int_\Omega K(s,t)\left[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right] \mathrm{d}\mu(t) \\ &= \alpha \int_\Omega K(s,t)x_1(t)\mathrm{d}\mu(t) + \beta \int_\Omega K(s,t)x_2(t)\mathrm{d}\mu(t) \\ &= (\alpha T x_1 + \beta T x_2)(s), \qquad \forall s \in \Omega.\end{aligned}$$

最后 T 是连续的, 因为由 (2.1.1) 知

$$\|Tx\|_2^2 = \|y\|_2^2 \leqslant a^2 \|x\|_2^2,$$

即

$$\|Tx\|_2 \leqslant a\|x\|_2, \qquad \forall x \in L^2(\mu).$$

例 2.1.3 考虑线性算子 $T: l^\infty \to l^1$, 当 $x = (x_n) \in l^\infty$, $Tx = y = (y_n)$ 时,

$$y_n = \sum_{k=1}^\infty a_{nk} x_k, \qquad n \geqslant 1, \tag{2.1.2}$$

其中 (a_{nk}) 是无穷矩阵并且 $a = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |a_{nk}| < \infty$. 则 T 是有界的.

实际上

$$\|Tx\|_1 = \sum_{n=1}^\infty \left|\sum_{k=1}^\infty a_{nk} x_k\right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |a_{nk}|\right) (\sup_{k\geqslant 1} |x_k|) = a\|x\|_\infty.$$

线性是容易验证的, 由定理 2.1.1, T 有界.

注意算子的有界性不仅与算子的构造有关, 而且与所定义的空间或者说空间的范数有关.

例 2.1.4　(1) 考虑算子 $D: C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$：

$$(Dx)(t) = x'(t), \qquad \forall x \in C^{(1)}[0,1], \tag{2.1.3}$$

其中 $C^{(1)}[0,1]$ 是在 $[0,1]$ 中一阶导数连续的函数全体, 其中的范数是

$$\|x\| = \max\{\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|, \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|\}.$$

由于

$$\|Dx\| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)| \leqslant \|x\|,$$

D 是有界线性算子.

(2) 仍考虑 $C^{(1)}[0,1]$, 但以 $\|x\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$ 作为其中元素的范数, 记此空间为 $\tilde{C}^{(1)}[0,1]$. 算子 D 的定义方式不变, 取 $x_n(t) = t^n$, 则 $\|x_n\| = 1$, $\|Dx_n\| = n$, $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Dx_n\| = \infty$. 所以 D 不是有界线性算子.

我们称 $T: X \to Y$ 是零算子, 若 $\forall x \in X,\ Tx = 0$. 称 $T: X \to X$ 是单位算子 (恒等算子), 若 $\forall x \in X, Tx = x$. 前者记为 0, 后者记为 I.

在理论和应用中, 仅考虑单个的有界算子往往是不够的, 通常还要考虑一族或一类有界算子. 今后我们设 X, Y 是线性赋范空间, 记 $B(X,Y)$ 是从 X 到 Y 中的有界线性算子全体, 并且像定义函数空间的线性运算那样定义 $B(X,Y)$ 中的加法和数乘, 则 $B(X,Y)$ 是线性空间. 当 $X = Y$ 时, 记 $B(X,Y)$ 为 $B(X)$.

定理 2.1.3　对于每个 $T \in B(X,Y)$, 令

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|. \tag{2.1.4}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $B(X,Y)$ 上的范数.

证明　(1) 易知 $\|T\| \geqslant 0$. 若 $\|T\| = 0$, 则 $\forall x, \|x\| \leqslant 1$, $\|Tx\| = 0$, 即 $Tx = 0$. 由于 $T(\alpha x) = \alpha Tx$, 故 $Tx = 0,\ \forall x \in X$, 从而 $T = 0$.

(2) $\forall \alpha \in \Phi$,

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|\alpha Tx\| = |\alpha|\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| = |\alpha|\,\|T\|.$$

(3) 若 $T_1, T_2 \in B(X,Y)$, 则

$$\begin{aligned}\|T_1 + T_2\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|(T_1+T_2)x\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1}(\|T_1x\| + \|T_2x\|) \\ &\leqslant \|T_1\| + \|T_2\|.\end{aligned}$$

所以 $\|\cdot\|$ 是 $B(X,Y)$ 上的范数.

定理 2.1.4 若 $T\in B(X,Y)$, 则

$$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\frac{1}{\delta}\sup_{\|x\|\leqslant\delta}\|Tx\|\qquad(\forall\delta>0).\tag{2.1.5}$$

证明 实际上

$$\begin{aligned}\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}&=\sup_{x\neq 0}\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\\&=\frac{1}{\delta}\sup_{\|x\|\leqslant\delta}\|Tx\|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1,x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}.\end{aligned}$$

故结论成立.

定理 2.1.5 若 Y 是 Banach 空间, 则 $B(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

证明 设 $\{T_n\}$ 是 $B(X,Y)$ 中的 Cauchy 序列, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists n_0$, 当 $m,n\geqslant n_0$ 时, $\|T_n-T_m\|<\varepsilon$. 此时 $\forall x\in X$,

$$\|T_nx-T_mx\|<\varepsilon\|x\|.\tag{2.1.6}$$

故 $\{T_nx\}$ 是完备空间 Y 中的 Cauchy 序列, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=y$, 并且记 $y=Tx$. T 在 X 上有定义, 由极限运算的线性知道 T 是线性算子.

在 (2.1.6) 中固定 $n\geqslant n_0$, 令 $m\to\infty$, 则

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\varepsilon\|x\|,$$

从而

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T_nx-Tx\|\leqslant\varepsilon.\tag{2.1.7}$$

于是 $T_n-T\in B(X,Y)$. $B(X,Y)$ 是线性空间, 从而 $T=T_n-(T_n-T)\in B(X,Y)$.

(2.1.7) 还说明 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$, 所以 $B(X,Y)$ 是完备的.

定义 2.1.2 线性赋范空间 X 上的连续线性泛函的全体记为 X^*, 称 X^* 是 X 的共轭空间.

对于 X^* 中的每个线性泛函 $f:X\to\Phi$, 其范数是

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|.\tag{2.1.8}$$

推论 2.1.1 任一线性赋范空间的共轭空间是 Banach 空间.

为了定性或定量地研究有界线性算子, 需要知道它的范数大小. 下面给出计算算子范数的若干例子.

例 2.1.5 考虑空间 Φ^n, 不过对于每个 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 以 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|$ 定义 x 的范数. 对于 Φ^m 也一样定义. 若映射 $T:\Phi^n\to\Phi^m$ 与 $m\times n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 对应, 我们来求 T 的范数.

首先设 $Tx=y=(y_1,\cdots,y_m)$, 则

$$\begin{aligned}||Tx||&=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|y_i|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\\&\leqslant\left(\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|)=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)||x||,\end{aligned}$$

于是 $||T||=\sup\limits_{||x||\leqslant 1}||Tx||\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

另一方面, 不妨设 $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i_0j}|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$, $1\leqslant i_0\leqslant m$. 取 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$, 其中 $x_j^{(0)}=\operatorname{sgn}a_{i_0j}$, 则 $\left\|x^{(0)}\right\|=1$,

$$||T||\geqslant\left\|Tx^{(0)}\right\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(0)}\right|=\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0j}|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

所以 $||T||=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

例 2.1.6 算子 $T:c_0\to l^1$, $Tx=y=(a_1x_1,a_2x_2,\cdots)$, $\forall x=(x_n)\in c_0$, 其中 $a_n\in\Phi$, $a=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$.

易知 T 是线性的. 又

$$||Tx||=\sum_{n=1}^{\infty}|a_nx_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|(\sup_{n\geqslant 1}|x_n|)=a\,||x||,$$

于是 $||T||\leqslant a=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

另一方面, $\forall\varepsilon>0$, 存在 k 使得 $\sum\limits_{i-1}^{k}|a_i|>a-\varepsilon$. 取 $x^{(k)}=(\operatorname{sgn}\alpha_1,\cdots,\operatorname{sgn}\alpha_k,0,\cdots)$, 则 $x^{(k)}\in c_0$, $\left\|x^{(k)}\right\|=1$, 从而

$$||T||\geqslant\left\|Tx^{(k)}\right\|=\sum_{i=1}^{k}|a_i|>a-\varepsilon.$$

ε 是任意的, 故 $\|T\| \geqslant a$, 总之有 $\|T\| = a = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

例 2.1.7 (第一型 Fredholm 积分算子)　设 $K(s,t)$ 是 $a \leqslant s,t \leqslant b$ 上的连续函数. 定义算子 $T : C[a,b] \to C[a,b]$, $Tx = y$,

$$y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall x(t) \in C[a,b], \tag{2.1.9}$$

此时

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left(\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t\right)\left(\max_{a\leqslant s\leqslant b}|x(t)|\right) \\ &= \left(\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t\right)\|x\|,\end{aligned}$$

故 $\|T\| \leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$.

注意到 $\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$ 是 s 的连续函数, 不妨设

$$\int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t = \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t,$$

其中 $a \leqslant s_0 \leqslant b$, 取 $x_0(t) = \operatorname{sgn} K(s_0,t)$, 则 $x_0(t)$ 可测并且 $|x_0(t)| \leqslant 1$. 根据 Lyzin 定理, $\forall \varepsilon > 0$, 存在连续函数 $x'(t)$, $|x'(t)| \leqslant 1$ 并且 $\mu\{t: \ x_0(t) \neq x'(t)\} < \varepsilon$, 从而 $x'(t) \in C[a,b]$, $\|x'\| \leqslant 1$. 此时

$$\begin{aligned}\|T\| \geqslant \|Tx'\| &= \max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)x'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\geqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)x_0(t)\mathrm{d}t\right| - \max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b K(s,t)[x'(t)-x_0(t)]\mathrm{d}t\right| \\ &\geqslant \int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t - \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,|x'(t)-x_0(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t - 2M\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 $M = \max_{a\leqslant t,s\leqslant b}|K(s,t)|$, ε 是任意的, 故知 $\|T\| = \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$.

例 2.1.8 将 $f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$ 分别看成 $C[a,b]$ 和 $L^1[a,b]$ 上的线性泛函, 分别计算它们的范数.

首先, 在 $C[a,b]$ 上

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant(b-a)\max_{t\in[a,b]}|x(t)|=(b-a)\,\|x\|.$$

取 $x_0(t)\equiv 1$, 则 $\|x_0\|=1, f(x_0)=b-a$. 故 $\|f\|=b-a$.

若 f 是 $L^1[a,b]$ 上的线性泛函, 则

$$|f(x)|\leqslant\int_a^b|x(t)|\,\mathrm{d}t=\|x\|_1.$$

取 $x_0(t)=\dfrac{1}{b-a}$, 则 $\|x_0\|=1, f(x_0)=1$. 于是 $\|f\|=1$.

2.2 共鸣定理及其应用

共鸣定理又称为算子族的一致有界原理. 其含义是在一定条件下由算子族的点点有界性可以得到按范数有界性.

设 $K=\{T_\lambda:\lambda\in\varLambda\}$ 是一族算子, 我们称 K 在集合 E 上是点点有界的, 若 $\forall x\in E, \sup\limits_{\lambda\in\varLambda}\|T_\lambda x\|<\infty$. 称 K 是一致有界的, 若 $\sup\limits_{\lambda\in\varLambda}\|T_\lambda\|<\infty$.

引理 2.2.1 (Osgood) 设 X 是线性赋范空间, $\{f_\lambda:\lambda\in\varLambda\}$ 是在 X 上定义的下半连续非负实函数族, E 是 X 中的第二纲集. 若 $\{f_\lambda:\lambda\in\varLambda\}$ 在 E 上点点有界, 则存在 $M>0$ 和非空开集 U 使得

$$f_\lambda(x)\leqslant M,\quad\forall\lambda\in\varLambda,\quad x\in U. \tag{2.2.1}$$

证明 设

$$E_{\lambda n}=\{x\in X:f_\lambda(x)\leqslant n\},\quad E_n=\{x\in X:f_\lambda(x)\leqslant n,\forall\lambda\in\varLambda\},$$

则 $E_n=\bigcap\limits_{\lambda\in\varLambda}E_{\lambda n}$. 由下半连续性, 每个 $E_{\lambda n}$ 是闭集, 从而 E_n 是闭集. 又由引理中条件, $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n$, E 是第二纲集, 所以 $\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n$ 是第二纲集. 此时存在 n_0 使得 $U=E_{n_0}^o\neq\varnothing$. 于是

$$f_\lambda(x)\leqslant n_0,\quad\forall\lambda\in\varLambda,\quad x\in U. \tag{2.2.2}$$

引理 2.2.2 设 $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 $B(X,Y)$ 中一族有界线性算子, 若 U 是 X 中的非空开集, 并且存在 $a > 0$ 使得 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda x\| \leqslant a,\ \ \forall x \in U$, 则存在 $M > 0$, 使得 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda\| \leqslant M$.

证明 不妨设 $0 \in U$, 否则取 $x_0 \in U$, 令 $U' = U - x_0$, 则 U' 是开集并且 $0 \in U'$. 此时每个 $x' \in U'$, $x' = x - x_0$, 其中 $x \in U$, 于是

$$\|T_\lambda x'\| = \|T_\lambda x - T_\lambda x_0\| \leqslant \|T_\lambda x\| + \|T_\lambda x_0\| \leqslant 2a, \qquad \forall \lambda \in \Lambda, \tag{2.2.3}$$

即变为所说的情况.

现在取 $\delta > 0$ 使得 $O(0,\ \delta) \subset U$, 则更有

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda x\| \leqslant a, \qquad \forall x \in O(0,\delta),$$

从而

$$\|T_\lambda\| = \sup_{\|x\|\leqslant\delta}\left\|T_\lambda\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\| = \frac{1}{\delta}\sup_{\|x\|\leqslant\delta}\|T_\lambda x\| \leqslant \frac{a}{\delta}, \qquad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{2.2.4}$$

定理 2.2.1 (共鸣定理) 设 X, Y 是线性赋范空间, $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是一族有界线性算子. 若 $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 在 X 的某个第二纲集上点点有界, 则它是一致有界的.

特别地, 在 Banach 空间上点点有界的连续线性算子族是一致有界的.

证明 实际上 $f_\lambda(x) = \|T_\lambda x\|$ 是 x 的连续函数, 然后应用引理 2.2.1、引理 2.2.2 即得到所要的结论.

定理 2.2.2 (Banach-Steinhaus) 设 $\{T_n\}$ 是从 Banach 空间 X 到线性赋范空间 Y 的有界线性算子, 若对于每个 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ 存在, 则存在 $T \in B(X,Y)$ 使得

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \quad \forall x \in X, \quad \|T\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|. \tag{2.2.5}$$

证明 $\forall x \in X$, 令 $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, 则 T 在 X 上有定义并且是线性算子. 极限的存在性说明 $\forall x \in X$, $\|T_n x\|$ 有界, X 是完备的, 根据共鸣定理, $\{T_n\}$ 是一致有界的. 故存在 $M > 0$ 使得 $\|T_n\| \leqslant M$, $n \geqslant 1$. 于是由 $\|T_n x\| \leqslant \|T_n\|\,\|x\|$ 知道

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty}\|T_n x\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|\,\|x\|, \qquad \forall x \in X,$$

所以 $\|T\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$.

共鸣定理在经典分析中有着广泛的应用. 对于其中一些相当复杂的问题, 应用共鸣定理可以简便地得以解决. 下面以 Hölder 不等式的逆问题、机械求积公式的收敛性和 Fourier 级数的发散问题作为例子说明这一点, 其中应注意的是如何将经典分析中的问题转化为泛函分析中的问题并加以解决.

例 2.2.1 设 $1 < p < \infty$, $\alpha = (\alpha_n)$ 是一列标量. 若 $\forall x = (x_n) \in l^p$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ 都收敛, 则 $\alpha \in l^q$, 这里 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

证明 $\forall n \geqslant 1$, 定义 $f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\forall x \in l^p$. 则 f_n 是 l^p 上的一列线性泛函. 由 Hölder 不等式

$$|f_n(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

于是 $\|f_n\| \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. 为了进一步求出其范数, 取

$$x_i^{(0)} = \frac{|\alpha_i|^q}{\alpha_i \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, 0, \cdots)$$

$\left(其中约定 \dfrac{0}{0} = 0\right)$. 容易计算出 $\left\|x^{(0)}\right\|_p = 1$, $f_n(x^{(0)}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, 所以 $\|f_n\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

由于级数对于每个 $x \in l^p$ 收敛, 即泛函序列 f_n 对于每个 $x \in l^p$ 收敛, 根据 Banach-Steinhaus 定理, f_n 是范数有界的, 所以

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{n \geqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{n \geqslant 1} \|f_n\| < \infty,$$

即 $\alpha \in l^q$.

其实上述结论对于 $p = 1$ 也成立, 此时 $\alpha \in l^\infty$. 同样地, 对于函数空间, 若 $\alpha(t)$ 是可测函数, 并且 $\forall x \in L^p(\mu)$, 积分 $\int_\Omega \alpha(t) x(t) \mathrm{d}t$ 存在, 则必有 $\alpha \in L^q(\mu)$, 其中 p, q 与上面相同.

例 2.2.2 机械求积公式的收敛性.

在定积分的近似计算中有各种公式, 如矩形公式、梯形公式和 Simpson 公式, 在微积分中已经证明当分点逐步加细时它们都能很好地收敛到函数的积分值. 这些公式归结起来可以叙述为这样的问题：给定一列分点组

$$a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k_n}^{(n)} = b$$

和一列实数组 A_{nk} , $k = 0, 1, \cdots, k_n; n = 1, 2, \cdots$. 若对于每个连续函数 $x(t)$, 记

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{k_n} A_{nk} x(t_k^{(n)}), \tag{2.2.6}$$

试问在什么条件下 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t$?

(2.2.6) 式即所谓的机械求积公式.

定理 2.2.3 (Polya) 机械求积公式在 $C[a,b]$ 上收敛的充分必要条件是：

(1) $\sum\limits_{k=0}^{k_n} |A_{nk}| \leqslant M, \quad \forall n \geqslant 1.$

(2) $\forall x_j(t) = t^j\ (j \geqslant 0),\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_j) = \int_a^b x_j(t)\mathrm{d}t.$

证明 易知 $f_n(x)$ 在 $C[a,b]$ 上有定义, 实际上是 $C[a,b]$ 上的线性泛函. 由于

$$|f_n(x)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{k_n} |A_{nk}|\right) \left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|\right) = \left(\sum_{k=0}^{k_n} |A_{nk}|\right) \|x\|,$$

故 $\|f_n\| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{k_n} |A_{nk}|$. 另一方面, 对于固定的 n, 在 $C[a,b]$ 中总可以取到这样的连续函数 $x_0(t)$, 使得

$$x_0(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} A_{nk}, \quad k = 0, 1, \cdots, k_n, \quad \|x_0\| = 1,$$

此时有

$$\|f_n\| \geqslant |f_n(x_0)| = \sum_{k=0}^{k_n} |A_{nk}|, \tag{2.2.7}$$

总之, $\|f_n\| = \sum\limits_{k=0}^{k_n} |A_{nk}|$.

现在, (1) 若机械求积公式收敛, 则 (2) 是显然的. 由 $C[a,b]$ 的完备性, 根据共鸣定理 (1) 成立.

(2) 反之, 由 (2) 知, 机械求积公式对于每个多项式是成立的. 若 $x \in C[a,b]$ 是任一元, 根据 Weierstrass 定理, 存在多项式 $p(t)$, 使得

$$||x-p|| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} ||x(t)-p(t)|| < \varepsilon$$

(ε 是任意给定的正数), 则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t - f_n(x)\right| &\leqslant \left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t - \int_a^b p(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\quad + \left|\int_a^b p(t)\mathrm{d}t - f_n(p)\right| + |f_n(p)-f_n(x)| \\ &\leqslant (b-a)\varepsilon + \left|\int_a^b p(t)\mathrm{d}t - f_n(p)\right| + M\varepsilon.\end{aligned}$$

由上面所说, 取 n_0 足够大, 当 $n \geqslant n_0$ 时中间一项可小于 ε, 从而

$$\left|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t - f_n(x)\right| < (b-a+1+M)\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}t$. 证毕.

例 2.2.3 (Fourier 级数的发散问题) 问题是要证明: 对于每一点 $t_0 \in [-\pi,\pi]$, 存在连续函数 x, 其 Fourier 级数在 t_0 发散. 若用构造性的方法, 此问题的证明相当复杂.

考虑 x 的 Fourier 级数的部分和

$$S_n(x)(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt), \qquad n \geqslant 0,$$

其中

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos kt\mathrm{d}t, \qquad k \geqslant 0,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\mathrm{d}t, \qquad k \geqslant 1.$$

实际计算可以得出

$$S_n(x)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-s)}{\sin\frac{t-s}{2}} x(s)\mathrm{d}s. \tag{2.2.8}$$

容易知道 $S_n(x)$ 是 $C[-\pi,\pi]$ 上的线性算子. 若固定 $t_0\in[-\pi,\pi]$, 则 $S_n(x)(t_0)$ 是 $C[-\pi,\pi]$ 上的线性泛函. 不失一般性, 我们就 $t_0=0$ 证明所说的结论. 记

$$f_n(x)=S_n(x)(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)s}{\sin\dfrac{s}{2}}x(s)\mathrm{d}s \tag{2.2.9}$$

作为 $C[-\pi,\pi]$ 上的线性泛函. 由例 2.1.7, 其范数是

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)s}{\sin\dfrac{s}{2}}\right|\mathrm{d}s. \tag{2.2.10}$$

试想若所说的结论不成立, 则 $\forall x\in C[-\pi,\pi]$, $f_n(x)$ 都收敛, 这就是说 f_n 在 $C[-\pi,\pi]$ 上点点收敛从而点点有界, $C[-\pi,\pi]$ 是 Banach 空间, 由共鸣定理知道 f_n 是范数有界的. 但现在我们计算出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)s}{\sin\dfrac{s}{2}}\right|\mathrm{d}s&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)s}{\sin s}\right|\mathrm{d}s\\&\geqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(2n+1)s|}{s}\mathrm{d}s\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{\frac{k\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{(k+1)\pi}{2(2n+1)}}\frac{|\sin(2n+1)s|}{s}\mathrm{d}s\\&\geqslant\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}}|\sin s|\mathrm{d}s\\&=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin s\,\mathrm{d}s\\&=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\to\infty.\end{aligned}$$

所以 f_n 在 $C[-\pi,\pi]$ 上不可能是点点收敛的. 即存在 $x\in C[-\pi,\pi]$, 其 Fourier 级数在 $t_0=0$ 发散.

2.3　开映射和闭图像定理

设 X,Y 是线性赋范空间, $T:X\to Y$ 是线性算子. 若 T 是一一的, 则 T^{-1} :

$R(T) \to X$ 是线性算子. 这里 $R(T) = T(X)$ 是 T 的值空间. 此时对于每个 $y \in R(T)$, 算子方程 $Tx = y$ 有解存在, $x = T^{-1}(y)$. 若 T 是到上的, $R(T) = Y$, 则 T^{-1} 是定义在整个空间 Y 上的线性算子, $I = T^{-1}T$ 是 X 上的单位算子. 若问 y 的微小变动是否会引起 x 的微小变动, 这是由 T^{-1} 的连续性决定的. 在微分方程理论中存在性、唯一性和解对所给数据的连续依赖性统称为适定问题. 这一问题是与开映射定理有关的. 实际上马上我们就会知道当 T 是一一的线性映射时, T 是开算子恰恰相当于 T^{-1} 是连续算子.

定义 2.3.1 设 X, Y 是线性赋范空间, $T: X \to Y$ 是线性算子, 若 T 将 X 中的每个开集映射为 Y 中的开集, 称 T 为开算子 (开映射).

引理 2.3.1 设 X, Y 是线性赋范空间, 线性算子 $T: X \to Y$ 是开算子当且仅当对于 $0 \in X$ 的每个邻域 $O(0,r)$, $T(O(0,r))$ 包含 $0 \in Y$ 的邻域.

证明 若 T 是开算子, $O(0,r)$ 是 $0 \in X$ 的邻域, 故 $T(O(0,r))$ 是开集, 从而是 $0 \in Y$ 的邻域.

反之, 若 T 具有所说的性质, $A \subset X$ 是任一开集, 我们证明 $T(A)$ 是 Y 中的开集. 实际上, $\forall y \in T(A)$, 设 $y = Tx, x \in A$, 则 $\exists r > 0, O(x,r) \subset A$. 此时 $-x + O(x,r) = O(0,r)$ 是 $0 \in X$ 的邻域, 于是 $-Tx + T(O(x,r)) = T(O(0,r))$ 包含 $0 \in Y$ 的邻域. 从而 $T(O(x,r)) = Tx + T(O(0,r))$ 包含 Tx 的邻域. 显然 $T(O(x,r)) \subset T(A)$, 即 y 是 $T(A)$ 的内点. y 是任意的, 故 $T(A)$ 是开集, T 是开算子.

定理 2.3.1 (开映射定理) 设 X 是 Banach 空间, Y 是线性赋范空间. 若 $T: X \to Y$ 是有界线性算子并且 $R(T)$ 是 Y 中的第二纲集, 则 T 必是开算子并且是到上的.

特别地, 从 Banach 空间到 Banach 空间上的有界线性算子是开算子.

证明 (1) 首先我们知道对于线性赋范空间的任意子集 A, B, $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$. 设

$$U = \{x : \|x\| < 1\}, \qquad U_1 = \left\{x : \|x\| < \frac{1}{2}\right\},$$

则

$$U_1 + U_1 \subset U, \qquad -U_1 = U_1.$$

于是由 T 的连续性,

$$\overline{T(U_1)} - \overline{T(U_1)} = \overline{T(U_1)} + \overline{T(U_1)} \subset \overline{T(U_1) + T(U_1)} \subset \overline{T(U)}.$$

现在 $\forall x \in X$, 存在自然数 n, 使得 $\left\|\frac{x}{n}\right\| < \frac{1}{2}$, 即 $\frac{x}{n} \in U_1$ 或 $x \in nU_1$, 故 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU_1$.

于是

$$T(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty} nT(U_1)\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(U_1)}.$$

$T(X)$ 是第二纲集, 故存在 $n_0, \overline{n_0T(U_1)}$ 具有非空内点, 从而 $\overline{T(U_1)}$ 具有非空内点. 所以 $\overline{T(U_1)}-\overline{T(U_1)}$ 和 $\overline{T(U)}$ 均以 $0\in Y$ 为内点. 不失一般性, 设 $\overline{T(U)}\supset O_Y(0,\delta), \delta>0$ (以下为了不至于混淆, 记 X 中 0 的邻域为 O_X, Y 中 0 的邻域为 O_Y). T 是线性的, 从而对于任何 $r>0$,

$$\begin{aligned} O_Y(0,\delta r)&=rO_Y(0,\delta)\subset r\overline{T(U)}\\ &=\overline{T(rU)}=\overline{T(O_X(0,r))}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

(2) 我们现在证明, 对于给定的 r,

$$O_Y\left(0,\frac{\delta r}{2}\right)\subset T(O_X(0,r)). \tag{2.3.2}$$

实际上, $\forall y_0\in O_Y\left(0,\frac{\delta r}{2}\right)$, 由 (2.3.1),

$$O_Y\left(0,\frac{\delta r}{2}\right)\subset \overline{T\left(O_X\left(0,\frac{r}{2}\right)\right)},$$

故存在 $x_1\in O_X\left(0,\frac{r}{2}\right)$ 使得 $\|y_0-Tx_1\|<\frac{r\delta}{2^2}$, 即 $y_1=y_0-Tx_1\in O_Y\left(0,\frac{r\delta}{2^2}\right)$. 仍由 (2.3.1),

$$O_Y\left(0,\frac{\delta r}{2^2}\right)\subset \overline{T\left(O_X\left(0,\frac{r}{2^2}\right)\right)},$$

故存在 $x_2\in O_X\left(0,\frac{r}{2^2}\right)$ 使得 $\|y_1-Tx_2\|<\frac{r\delta}{2^3}$, 于是

$$y_2=y_1-Tx_2=y_0-Tx_1-Tx_2\in O_Y\left(0,\frac{\delta r}{2^3}\right),\cdots$$

一般来说, $\exists x_n\in O_X\left(0,\frac{r}{2^n}\right)$, 使得

$$y_n=y_0-(Tx_1+\cdots+Tx_n)\in O_Y\left(0,\frac{\delta r}{2^{n+1}}\right).$$

现在, 一方面 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0,\ y_0=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} Tx_i$; 另一方面,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{r}{2^i}=r.$$

X 完备, 故存在 $\sum_{i=1}^{n} x_i \to x_0 \in X$. 由 $\|x_0\| \leqslant \sum_{i-1}^{\infty} \|x_i\| < r$ 知 $x_0 \in O(0,r)$. T是连续的, 故 $y_0 = \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = Tx_0$. 从而

$$O_Y\left(0, \frac{\delta r}{2}\right) \subset T(O_X(0,r)),$$

即 (2.3.2) 成立. 由引理 2.3.1, T 是开算子.

(3) 记 $V = O_Y\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, 取 $r = 1$, (2.3.2) 变为 $V \in T(U)$. 像 (1) 中已证明的那样,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU, \qquad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV,$$

但

$$T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(U) \supset \bigcup_{n-1}^{\infty} nV = Y.$$

所以 T 是到上的.

由于完备度量空间是第二纲集, 故最后的结论是明显的.

定理 2.3.2 (逆算子定理) 设 X 是 Banach 空间, Y 是线性赋范空间, $T: X \to Y$ 是一一的有界线性算子并且 $T(X)$ 是 Y 中第二纲集, 则 T^{-1} 是定义在全空间 Y 上的有界线性算子, 并且 Y 一定是 Banach 空间.

证明 T 是一一的, 因此 T^{-1} 存在. 根据开映射定理, T 是到上的开映射, 这说明 T^{-1} 是有界的. 因此 T 是 X, Y 之间的同构. 定理 1.4.6 说明 Y 是 Banach 空间.

推论 2.3.1 设 X, Y 是 Banach 空间, $T: X \to Y$ 是一一的到上的有界线性算子, 则存在正数 $a, b > 0$, 使得

$$a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

推论 2.3.2 若线性空间 X 在两个范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 之下都成为 Banach 空间并且存在 $a > 0$ 使得 $\|x\|_2 \leqslant a\|x\|_1, \forall x \in X$, 则必存在 $b > 0$, 使得 $\|x\|_1 \leqslant b\|x\|_2, \forall x \in X$.

证明 为不至于混淆, 记 $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$. 考虑单位映射 $I: X_1 \to X_2, x_1 \to x$. 由所设条件, $\|Ix\|_2 \leqslant a\|x\|_1$, 因此 I 是一一的到上的有界线性算子. 由定理 2.3.2, I^{-1} 有界, 从而

$$\|x\|_1 = \left\|I^{-1}x\right\|_1 \leqslant \left\|I^{-1}\right\| \|x\|_2 = b\|x\|_2, \qquad \forall x \in X.$$

这一结论表明, 如果两个范数都使 X 成为 Banach 空间, 只要两个范数是可比较的, 它们一定是彼此等价的. 此时任一序列 $x_n \in X, \|x_n\|_1 \to 0$ 当且仅当 $\|x_n\|_2 \to 0$. 这一点与有限维空间的情况 (推论 1.4.5) 形成了对照.

例 2.3.1 考虑第一型 Fredholm 积分方程

$$x(s) = \lambda \int_0^1 K(s,t)x(t)\mathrm{d}t + \varphi(s), \tag{2.3.3}$$

其中 λ 是某个常数, $K(s,t)$ 是 $0 \leqslant s,t \leqslant 1$ 上的二元连续函数, $\varphi \in C[0,1]$. 方程 (2.3.3) 还可以简单记为

$$(I - \lambda K)x = \varphi, \tag{2.3.4}$$

其中 $Kx(s) = \displaystyle\int_0^1 K(s,t)x(t)\mathrm{d}t, K$ 是 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的线性算子. 由例 2.1.7 可以求得 K 的范数 $\|K\|$. 不妨固定 λ, 使 $|\lambda|\,\|K\| < 1$. 令

$$Vx(s) = \lambda Kx(s) + \varphi(s), \qquad \forall s \in [0,1],$$

则 V 是 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的算子, 不过它不一定是线性的. 由

$$\|Vx_1 - Vx_2\| = |\lambda|\,\|Kx_1 - Kx_2\| \leqslant |\lambda|\,\|K\|\,\|x_1 - x_2\|,$$

V 是压缩的, 从而在 $C[0,1]$ 上有唯一不动点. 它的不动点即是方程 (2.3.3) 的解. 这说明 $\forall \varphi \in C[0,1]$, 算子方程 (2.3.4) 存在唯一连续解, 从而线性算子 $I - \lambda K$ 是 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 上的一一映射.

由于 $C[0,1]$ 是 Banach 空间, 定理 2.3.2 说明 $(I - \lambda K)^{-1}$ 是有界的. 换句话说 φ 的在 $C[0,1]$ 范数意义下的微小变动, 所导致的解 x 的相应变动也是很小的.

例 2.3.2 考虑高阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots \\ \qquad + a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_n(t)x(t) = y(t), \\ x^{(i)}(a) = 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \end{cases} \tag{2.3.5}$$

其中 $a_1(t), \cdots, a_n(t) \in C[a,b]$. 记方程的左端为 $D_n(x)$, 我们将证明算子方程 $D_n(x) = y$ 关于 $y \in C[a,b]$ 具有连续依赖性.

考虑算子 $T: C_0^{(n)}[a,b] \to C[a,b], x| \to D_n(x)$, 其中 $C_0^{(n)}[a,b]$ 是具有 n 阶连续导数并且满足 $D^{(i)}(a) = 0, 0 \leqslant i \leqslant n-1$ 的函数全体. 对于空间 $C_0^{(n)}[a,b]$ 仍沿用例 1.2.10 中的范数, 容易验证 $C_0^{(n)}[a,b]$ 是完备的线性赋范空间.

首先 T 是有界的, 不妨设 $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|a_i(t)|\leqslant M,\ 1\leqslant i\leqslant n$, 则

$$||Tx||=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|D_nx(t)|\leqslant \max\{M,1\}\sum_{i=0}^{n}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|x^{(i)}(t)\right|=\max\{M,1\}\,||x||. \quad (2.3.6)$$

后者是上面提到的 x 在 $C^{(n)}[a,b]$ 中的范数, n 是固定的, 故 T 有界.

其次, 若将方程改写为

$$x^{(n)}=f(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)})$$

的形式, 显然 f 不仅关于各变元是连续的, 而且除 t 之外, f 关于各变元具有有界的一阶导数, 从而关于这些变元满足 Lipschitz 条件. 由 Picard 定理, 对于每个 $y\in C[a,b]$ 存在唯一的 $x\in C_0^{(n)}[a,b]$ 使之满足 $D_n(x)=y$ 和初值条件. 实际上这个存在和唯一性即说明 T 是到上的和一一的. 因此由逆算子定理, T^{-1} 是连续算子, 即 $D_n(x)=y$ 的解随 y 而连续变动.

现在让我们转到闭图像定理.

定义 2.3.2 (1) 设 X,Y 是两个集合, 考虑乘积

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\},$$

若 $T:X\to Y$ 为某个映射, 称集合

$$G(T)=\{(x,Tx):x\in X\}\subset X\times Y \quad (2.3.7)$$

是 T 的图像. 显然 $(x,y)\in G(T)$, 当且仅当 $x\in X,y=Tx$.

(2) 若 X,Y 是线性赋范空间, 则

$$||(x,y)||=||x||+||y||,\qquad \forall x\in X,y\in Y \quad (2.3.8)$$

是 $X\times Y$ 上的范数. 容易知道 $X\times Y$ 是线性赋范空间, 并且 $X\times Y$ 完备, 当且仅当 X 与 Y 都完备 (1.5 节).

若 $T:X\to Y$ 是线性算子, 则 $\forall\alpha,\beta\in\Phi,(x,Tx),(y,Ty)\in G(T)$,

$$\begin{aligned}\alpha(x,Tx)+\beta(y,Ty)&=(\alpha x+\beta y,\alpha Tx+\beta Ty)\\&=(\alpha x+\beta y,T(\alpha x+\beta y))\in G(T),\end{aligned}$$

即 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 的线性子空间.

称 $T:X\to Y$ 是闭算子, 若 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中的闭集.

定理 2.3.3　(1) $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中的闭集当且仅当对于 X 中任一序列 $\{x_n\}$, 若 $x_n\to x, Tx_n\to y$, 则 $y=Tx$.

(2) 连续线性算子是闭算子.

证明　(1) 若 $G(T)$ 闭, $x_n\in X, x_n\to x, Tx_n\to y$, 则

$$||(x_n,Tx_n)-(x,y)||=||x_n-x||+||Tx_n-y||\to 0,$$

即在 $G(T)$ 中 $(x_n,Tx_n)\to(x,y)$, 于是 $(x,y)\in G(T)$, 即 $y=Tx$.

反之, 若 $(x_n,y_n)\in G(T)$,$(x_n,y_n)\to(x,y)\in X\times Y$, 由 (2.3.8),

$$||x_n-x||\leqslant||(x_n,Tx_n)-(x,y)||\to 0,$$

$$||Tx_n-y||\leqslant||(x_n,Tx_n)-(x,y)||\to 0,$$

所以 $x_n\to x$, $Tx_n\to y$. 于是由所说条件 $y=Tx$, 即 $(x,y)\in G(T)$, $G(T)$ 闭.

(2) 设 $T:X\to Y$ 连续, 若 $x_n\in X, x_n\to x, Tx_n\to y$, 由 T 的连续性知道 $Tx_n\to Tx$, 从而 $Tx=y$. 由 (1) 知 $G(T)$ 是闭集, T 是闭算子.

例 2.3.3　考虑例 2.1.4(2) 中的空间 $\tilde{C}^{(1)}[a,b]$ 和算子 D, 我们已经知道 D 不是有界的, 现在我们验证 D 是闭算子.

实际上, 若 $x_n\in X, x\in X$, $||x_n-x||\to 0$ 并且 $||Dx_n-y||\to 0$, 即在 $[a,b]$ 上, x_n 一致收敛于 x, $x_n'=Dx_n$ 一致收敛于 y. 由数学分析中求导与极限符号交换的定理,

$$\begin{aligned}(Dx)(t)&=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lim_{n\to\infty}x_n(t))\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n(t)=\lim_{n\to\infty}Dx_n(t)=y(t),\end{aligned}$$

即 $y=Dx$, 所以 D 是闭算子.

定理 2.3.4 (闭图像定理)　设 X, Y 是 Banach 空间, $T:X\to Y$ 是线性算子. 若 T 是闭算子, 则 T 连续.

证明　注意此时 $X\times Y$ 是 Banach 空间, $G(T)$ 是闭的, 从而 $G(T)$ 本身是 Banach 空间.

定义

$$P:G(T)\to X,\ P(x,Tx)=x,\ \forall(x,Tx)\in G(T).$$

则 P 是线性的、到上的、一一的. 实际上, $P(x_1,Tx_1)=P(x_2,Tx_2)$ 即是 $x_1=x_2$, 从而 $(x_1,Tx_1)=(x_2,Tx_2)$. 故 P^{-1} 存在, $P^{-1}x=(x,Tx)$, $\forall x\in X$. 现在

$$||P(x,Tx)||=||x||\leqslant||(x,Tx)||,$$

故 $||P|| \leqslant 1$. 根据逆算子定理, $P^{-1}: X \to G(T)$, $P^{-1}x = (x, Tx)$ 有界, 从而

$$||Tx|| \leqslant ||x|| + ||Tx|| = ||(x, Tx)|| = \left\|P^{-1}x\right\| \leqslant \left\|P^{-1}\right\| ||x||, \qquad \forall x \in X,$$

即 $||T|| \leqslant \left\|P^{-1}\right\|$, T 连续. 证毕.

下面让我们介绍关于 Banach 空间的 Schauder 基的知识, 它可以看成开映射定理和闭图像定理的一个应用. 我们知道 Hamel 基底是与空间的拓扑不相干的一种基底, 因此其应用很受局限. 但 Schauder 基不同, 具有 Schauder 基的空间有很多优良性质, 它给理论研究和应用带来了方便.

定义 2.3.3 设 X 是线性赋范空间. 序列 $\{e_n : n \geqslant 1\} \subset X$ 称为 X 的 Schauder 基, 若 $\forall x \in X$, 存在唯一的标量序列 $\{\alpha_n\}$ 使得在范数收敛意义下 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, 其中 α_n 称为 x 关于 Schauder 基的第 n 个坐标.

定理 2.3.5 具有 Schauder 基的 Banach 空间是可分的.

证明 对于 Schauder 基 $\{e_n : n \geqslant 1\}$, 考虑它的有理系数线性组合的全体

$$B = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i e_i : r_i \in Q, n \geqslant 1\right\},$$

则 B 是 X 中的可数集, 并且 B 在 X 中稠密.

例 2.3.4 设 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是 $l^p (1 \leqslant p < \infty)$ 或 c_0 中的元, 其中 $e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{n}, 0, \cdots)$, 则 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是 $l^p (1 \leqslant p < \infty)$ 或 c_0 的 Schauder 基. 这些都可以由定义直接验证. c 也是具有 Schauder 基的空间, 只须在上述 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 中补充 $e_0 = (1, 1, \cdots)$ 便成为 c 的 Schauder 基. 实际上空间 $L^p[a, b] (1 \leqslant p < \infty)$ 与 $C[a, b]$ 也是具有 Schauder 基的.

例 2.3.5 空间 l^∞ 不具有 Schauder 基, 因为它连可分空间都不是. 同样地, 空间 $L^\infty[a, b]$ 也不具有 Schauder 基.

定理 2.3.6 设 $(X, ||\cdot||)$ 是以 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 为 Schauder 基的 Banach 空间. 对于每个 $x \in X$, 令

$$||x||_1 = \sup_{n \geqslant 1} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\|, \tag{2.3.9}$$

则 $||\cdot||_1$ 是 X 上的与 $||\cdot||$ 等价的完备范数.

证明 (1) 首先每个 $e_i \neq 0$, 否则表达式 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 不是唯一的. 此外, 直接验证可知 $||\cdot||_1$ 是 X 上的完备范数.

(2) 设 $\{x_k\}$ 是 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中的 Cauchy 点列, $x_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} e_n$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 K, 当 $k, s \geqslant K$ 时, $\|x_k - x_s\|_1 < \varepsilon$. $\forall n \geqslant 1$, 由

$$\begin{aligned}\left\|(\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(s)})e_n\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{s})e_i - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(s)})e_i\right\| \\ &\leqslant 2\|x_k - x_s\|_1 < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\left|\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(s)}\right| < \frac{2\varepsilon}{\|e_n\|}. \tag{2.3.10}$$

$\{\alpha_n^{(k)}\}$ 是 Cauchy 数列, 故存在 $\alpha_n, \alpha_n^{(k)} \to \alpha_n (k \to \infty)$. 由于 $k, s \geqslant K$ 时,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(s)} e_i\right\| \leqslant \|x_k - x_s\|_1 < \varepsilon, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

令 $s \to \infty$, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| < \varepsilon, \qquad \forall n \geqslant 1. \tag{2.3.11}$$

现在设 $m > n, k \geqslant K$, 则

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \leqslant& \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} e_i\right\| \\ &+ \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \\ \leqslant& 2\varepsilon + \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i\right\|.\end{aligned}$$

由于 $x_k \in X, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i$ 是收敛序列, 故存在 n_0, 当 $m > n \geqslant n_0$ 时, 上面最后一项小于 ε. 于是

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| < 3\varepsilon.$$

这说明 $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i : n \geqslant 1\right\}$ 是 $(X, \|\cdot\|)$ 中的 Cauchy 序列, X 在范数 $\|\cdot\|$ 之下是完备的, 从而存在 $x \in X, x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$. (2.3.11) 还说明, $\|x_k - x\|_1 \to 0 (k \to \infty)$, 故 $(X, \|\cdot\|_1)$ 完备.

(3) 最后由 $\|x\| \leqslant \|x\|_1, \forall x \in X, \|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|$ 是可比较的. 由逆算子定理之推论 2.3.2 知道, $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|$ 等价.

定理 2.3.7 设 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是 Banach 空间 X 的 Schauder 基, 记

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) e_n, \qquad \forall x \in X, \tag{2.3.12}$$

则 $\alpha_n(x)$ 是 X 上的连续线性泛函.

证明 设另有 $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(y) e_n$, 则 $\alpha x + \beta y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\alpha x + \beta y) e_n$, 从而

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(\alpha x + \beta y) - \alpha\, \alpha_n(x) - \beta\, \alpha_n(y)] e_n.$$

由表达式的唯一性得到

$$\alpha_n(\alpha x + \beta y) = \alpha\, \alpha_n(x) + \beta\, \alpha_n(y), \qquad \forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \varPhi,$$

故 $\alpha_n(x)$ 是 X 上的线性泛函.

由定理 2.3.6, 不妨设 $\|x\|_1 \leqslant b \|x\|$, 则

$$\begin{aligned}
\|\alpha_n(x) e_n\| &= \left\| \sum_{i-1}^{n} \alpha_i(x) e_i - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(x) e_i \right\| \\
&\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) e_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(x) e_i \right\| \\
&\leqslant 2 \|x\|_1 \leqslant 2b \|x\|.
\end{aligned}$$

故 $|\alpha_n(x)| \leqslant \dfrac{2b}{\|e_n\|} \|x\|$, $\|\alpha_n\| \leqslant \dfrac{2b}{\|e_n\|}$. α_n 连续.

定理 2.3.8 设 X 是 Banach 空间, X 中的非零元素序列 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是 X 的 Schauder 基, 当且仅当

(1) $\overline{\operatorname{span}}\{e_n\} = X$.

(2) 存在 $K > 0$, 使得 $m \geqslant n$ 时,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \leqslant K \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \right\|, \tag{2.3.13}$$

其中 $\{\alpha_i\}$ 是任一标量序列.

证明　(1) 若 $\{e_n\}$ 是 Schauder 基, 显然 (1) 成立. 考虑 X 上的算子 $P_n : P_n x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, P_n 是线性算子, 并且

$$\|P_n x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant K\|x\|,$$

于是 $\|P_n\| \leqslant K$, $\forall n \geqslant 1$. 现在若 $m \geqslant n$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| = \|P_n P_m x\| \leqslant \|P_n\|\,\|P_m x\| \leqslant K\left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\right\|.$$

(2) 若 $\{e_n\}$ 满足 (1), (2), 首先表达式 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 是唯一的. 为此只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = 0$ 时, $\alpha_n = 0$, $\forall n \geqslant 1$. 实际上由

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right\| = 0,$$

固定 n, 由 (2.3.10), $\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \leqslant K\left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\right\| \to 0 (m \to \infty)$. 令 $n = 1, 2, \cdots$, 则分别得到 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \cdots = 0$.

类似于定理 2.3.6(2) 的证明, 具有表达式 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 的 x 全体是 X 的闭线性子空间, 故从 (1) 得出 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是 X 的 Schauder 基. 证毕.

除了例 2.3.4 中举出的空间之外, 可分的 Hilbert 空间也具有 Schauder 基. 但一般来说, 除了某些特殊空间以外, 要验证空间中某个点列构成空间的 Schauder 基或者判断某个空间是否具有 Schauder 基并非易事. 这里我们不作进一步介绍了. 关于具有 Schauder 基的空间的一个特殊性质将在 3.3 节予以讨论. 关于 $L^q[0,1]$ 空间的一种 Schauder 基 (正交基) 将在 4.3 节给出.

2.4　Hahn-Banach 延拓定理

对于一个线性赋范空间上的线性泛函知道得越多, 对这个空间本身就了解得越清楚. 有时候为了某种目的, 要求有足够多的满足一定条件的线性泛函存在, 本节的 Hahn-Banach 定理常常能够为这样的线性泛函的存在性提供保证.

定义 2.4.1 设 $D(T)$ 与 $D(T_1)$ 分别是算子 T 与 T_1 的定义域, 若 $D(T) \subset D(T_1)$ 并且 $T_1 x = Tx$, $\forall x \in D(T)$, 则称算子 T_1 是 T 的延拓.

定义 2.4.2 线性空间 X 上的实泛函 $p(x)$ 称为是次可加的, 若

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in X.$$

称为正齐性的, 若

$$p(tx) = tp(x), \quad \forall x \in X, \quad t \geqslant 0.$$

显然, 线性空间上的每个半范数都是次可加正齐性泛函.

定理 2.4.1 (Hahn-Banach) 设 X 是实线性空间, $p: X \to \mathbf{R}$ 是 X 上的次可加正齐性泛函, $M \subset X$ 是线性子空间, $f_0: M \to \mathbf{R}$ 是 M 上的线性泛函. 则

(1) 存在 X 上的线性泛函 $f: X \to \mathbf{R}$ 使得 $f(x) = f_0(x), \forall x \in M$.

(2) 若 $f_0(x) \leqslant p(x), \forall x \in M$, 则可使 f 满足

$$f(x) \leqslant p(x), \qquad \forall x \in X. \tag{2.4.1}$$

证明 (1) 设 $M \neq X$, 取 $x_0 \in X \backslash M$, 记 $M' = \mathrm{span}\{x_0, M\}$. 则 $\forall x' \in M', x' = x + tx_0$, 其中 $x \in M$, $t \in \mathbf{R}$. 我们先验证此分解式是唯一的. 否则又有 $x' = x_1 + t_1 x_0, x_1 \in M, t_1 \in \mathbf{R}$, 则

$$x - x_1 = -(t - t_1)x_0.$$

若 $t = t_1$, 则 $x = x_1$, 唯一性成立. 若 $t \neq t_1$, 则 $x_0 = -\dfrac{x - x_1}{t - t_1} \in M$, 与 x_0 的取法矛盾.

任取常数 $c \in \mathbf{R}$, 令

$$f(x') = f_0(x) + tc, \qquad \forall x' = x + tx_0,$$

则例行的验证表明 f 是 M' 上的线性泛函. 由于 $x' \in M$ 当且仅当 $t = 0$, 此时 $f(x') = f_0(x)$, 所以 f 是 f_0 从 M 到 M' 的延拓.

(2) 以下我们证明当 $f_0(x) \leqslant p(x), \forall x \in M$ 时, 适当选择 c 可使 $f(x') \leqslant p(x')$, $\forall x' \in M'$. 实际上, $\forall x, y \in M$, 由

$$f_0(x) + f_0(y) = f_0(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x - x_0) + p(x_0 + y),$$

或

$$f_0(x) - p(x - x_0) \leqslant p(x_0 + y) - f_0(y),$$

故存在 c 满足

$$\sup_{x\in M}[f_0(x)-p(x-x_0)]\leqslant c\leqslant \inf_{y\in M}[p(x_0+y)-f_0(y)], \tag{2.4.2}$$

取这样的 c 作成如上的线性泛函 f.

若 $x'=x+tx_0$, $t>0$, 由 $p(x_0+y)-f_0(y)\geqslant c$ 对于每个 $y\in M$ 成立, 用 $t^{-1}x$ 代替 y, 则 $p(x_0+t^{-1}x)-f_0(t^{-1}x)\geqslant c$, 从而

$$f(x')=f_0(x)+tc\leqslant p(x+tx_0)=p(x').$$

若 $x'=x+tx_0, t<0$, 由 $f_0(x)-p(x-x_0)\leqslant c$ 对于每个 $x\in M$ 成立, 用 $-t^{-1}x$ 代替 x, 则 $f_0(-t^{-1}x)-p(-t^{-1}x-x_0)\leqslant c$, 即

$$-f_0(x)+p(x+tx_0)\geqslant tc,$$

从而

$$f(x')=f_0(x)+tc\leqslant p(x+tx_0)=p(x').$$

若 $t=0$, 显然 $f(x')=f_0(x)\leqslant p(x)=p(x')$. 故 f 是 f_0 从 M 到 M' 上的满足 (2.4.1) 的延拓.

(1), (2) 的证明表明, 可以把 f_0 延拓到比 M 大 1 维的空间上去. 由数学归纳法, 可以把 f_0 延拓到比 M 大任意有限维, 甚至可列维的空间上去. 这可以通过数学归纳法来实现. 可惜这还不是一般情况, 事实上存在着不可列维数的赋范空间. 要完成这最后一步的证明, 让我们来应用 Zorn 引理 (见本书附录).

(3) 设 G 是 f_0 的所有延拓的集合, 即对于每个 $g\in G$,

① g 在 X 的子空间 M_g 上有定义, $M\subset M_g$.

② $\forall x\in M, g(x)=f_0(x)$.

③ $g(x)\leqslant p(x)$, $\forall x\in M_g$.

在 G 中规定 $g\leqslant g'$ 当且仅当 $M_g\subset M_{g'}$ 并且 $g(x)=g'(x)$, $\forall x\in M_g$. 容易验证 G 是半序集.

若 G_0 是 G 的全序子集, 令 $\tilde{M}=\bigcup\limits_{g\in G_0}M_g$, 当 $x\in M_g$ 时定义 $h(x)=g(x)$. 由于 G_0 是全序的, $\tilde{M}$ 是线性子空间, 如当 $x,x'\in\tilde{M}$ 时, 若 $x\in M_g, x'\in M_{g'}$, 不妨设 $M_g\subset M_{g'}$, 则 $\alpha x+\beta x'\in M_g'\subset\tilde{M}$. 此时

$$h(\alpha x+\beta x')=g'(\alpha x+\beta x')=\alpha g'(x)+\beta g'(x')=\alpha h(x)+\beta h(x').$$

显然 $M \subset \tilde{M}$, 并且当 $x \in M$ 时, $h(x) = g(x) = f_0(x)$. 又若 $x \in \tilde{M}$, 不妨设 $x \in M_g$, 则 $h(x) = g(x) \leqslant p(x)$, 从而 $h \in G$, $h \geqslant g$, $\forall g \in G_0$. h 是 G_0 的上界.

根据 Zorn 引理, G 有极大元 f. f 即是定理中所需要的延拓. 为此只需证明 $M_f = X$. 若不然, 存在 $x_0 \in X \backslash M_f$. 令

$$M_f' = \mathrm{span}\{x_0, M_f\} \supset M_f, \qquad M_f' \neq M_f.$$

由 (1), 此时有 $f' \in G$, f' 定义在 M_f' 上并且 $f' \neq f, f' \geqslant f$. 这与 f 为极大元矛盾. 证毕.

现在我们考虑复空间上线性泛函的延拓.

首先注意对于复空间上任一复线性泛函 $f(x)$, 不妨设 $f(x) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x)$, 其中 f_1, f_2 分别为 f 的实部和虚部. 根据 f 的线性, 容易验证 f_1, f_2 是实线性的. 又

$$\mathrm{i}f(x) = f(\mathrm{i}x) = f_1(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}f_2(\mathrm{i}x),$$
$$\mathrm{i}f(x) = \mathrm{i}f_1(x) - f_2(x),$$

从而

$$f_2(x) = -f_1(\mathrm{i}x), \qquad f(x) = f_1(x) - \mathrm{i}f_1(\mathrm{i}x). \tag{2.4.3}$$

由此知道, 复空间上任何复线性泛函可以通过它的实部表达出来. 但应当注意的是, 对于实线性泛函 f_1, 一般来说 $f_1(\mathrm{i}x) \neq \mathrm{i}f_1(x)$.

定理 2.4.2 设 X 是复线性空间, p 是 X 上的半范数, $M \subset X$ 是线性子空间. 若 f_0 是 M 上的复线性泛函并且

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \qquad \forall x \in M,$$

则存在 X 上的线性泛函 F, 使得

$$F(x) = f_0(x), \qquad \forall x \in M,$$
$$|F(x)| \leqslant p(x), \qquad \forall x \in X. \tag{2.4.4}$$

证明 在 M 上, 设 $f_0(x) = f_1(x) - \mathrm{i}f_1(\mathrm{i}x)$, 把 M 看成实线性子空间 (同样地, 把 X 看成实线性空间), 由假设

$$f_1(x) \leqslant |f_1(x)| \leqslant |f_0(x)| \leqslant p(x), \qquad \forall x \in M.$$

由定理 2.4.1, X 上存在实线性泛函 $F_1(x)$, 使得

$$F_1(x) = f_1(x), \quad \forall x \in M, \quad F_1(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in X.$$

考虑复线性泛函 $F(x) = F_1(x) - \mathrm{i}F_1(\mathrm{i}x)$, $\forall x \in X$, 不难知道 F 是可加的, 因此为了验证 F 是复线性的, 只需注意

$$F(\mathrm{i}x) = F_1(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}F_1(-x) = \mathrm{i}[F_1(x) - \mathrm{i}F_1(\mathrm{i}x)] = \mathrm{i}F(x).$$

另一方面, 若 $x \in M$, 则

$$F(x) = F_1(x) - \mathrm{i}F_1(\mathrm{i}x) = f_1(x) - \mathrm{i}f_1(\mathrm{i}x) = f_0(x).$$

设 $F(x) = re^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $F(e^{-\mathrm{i}\theta}x)$ 是实数, 故

$$|F(x)| = \left|F(e^{-\mathrm{i}\theta}x)\right| = \left|F_1(e^{-\mathrm{i}\theta}x)\right| \leqslant p(e^{-\mathrm{i}\theta}x) = p(x).$$

$F(x)$ 即是所要的复线性泛函.

定理 2.4.3　设 X 是 (实或复) 线性赋范空间, $M \subset X$ 是线性子空间, f_0 是 M 上的连续线性泛函, 则存在 X 上的连续线性泛函 f, 使得

$$f(x) = f_0(x), \quad \forall x \in M, \quad \|f\| = \|f_0\|. \tag{2.4.5}$$

称 f 是 f_0 的保范线性延拓.

证明　令 $p(x) = \|f_0\|\,\|x\|$, 则 $p(x)$ 是 X 上的半范数并且

$$|f_0(x)| \leqslant \|f_0\|\,\|x\| = p(x), \qquad \forall x \in M.$$

在复情况, 由定理 2.4.2, 存在 X 上的线性泛函 f, 使得 $f(x) = f_0(x), \forall x \in M$, 并且

$$|f(x)| \leqslant p(x) = \|f_0\|\,\|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

在实情况, 由定理 2.4.1, 存在 X 上的线性泛函 f, 使得

$$f(x) \leqslant p(x) = \|f_0\|\,\|x\|.$$

以 $-x$ 代替 x, 则有

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = \|f_0\|\,\|-x\| = \|f_0\|\,\|x\|,$$

从而

$$|f(x)| \leqslant \|f_0\|\,\|x\|, \qquad \|f\| \leqslant \|f_0\|,$$

总之 f 连续. 此外

$$\|f_0\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1, x\in M} |f_0(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1, x\in M} |f(x)| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1, x\in X} |f(x)| = \|f\|, \tag{2.4.6}$$

所以最终有 $\|f\| = \|f_0\|$.

推论 2.4.1 设 X 是线性赋范空间, $x_0 \in X, x_0 \neq 0$, 则存在 $f \in X^*$ 使得 $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$.

证明 考虑子空间 $M = \{\alpha x_0 : \alpha \in \Phi\}$ 和 M 上的线性泛函 $f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$, f_0 在 M 上连续. 实际上

$$|f_0(\alpha x_0)| = |\alpha| \, \|x_0\| = \|\alpha x_0\| ,$$

于是 $\|f_0\| = 1$. 又显然 $f_0(x_0) = \|x_0\|$. 由定理 2.4.3, 存在 $\|f\| = \|f_0\| = 1$, 当 $x \in M$ 时, $f(x) = f_0(x)$. 特别地, $f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|$.

推论 2.4.2 设 X 是线性赋范空间, $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则存在 $f \in X^*$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

证明 由 $x_1 - x_2 \neq 0$, 根据推论 2.4.1, 存在 $f \in X^*, f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0$, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

推论 2.4.3 设 X 是线性赋范空间, $x_1, x_2 \in X$, 若 $\forall f \in X^*, f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$.

这是推论 2.4.2 的逆否命题.

从直观上说, 推论 2.4.1 表明, 对于一个非零线性赋范空间, 一定存在非零连续线性泛函. 推论 2.4.2 则表明非零连续线性泛函是足够多的, 以至于每两个不同的点都可以由某个连续线性泛函区分开来. 或者简单地说, X^* 在 X 上是可分点的.

推论 2.4.4 设 X 是线性赋范空间, $x_0 \in X$, 则

$$\|x_0\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1, f \in X^*} |f(x_0)| . \tag{2.4.7}$$

证明 首先由 $\|f\| \leqslant 1$, $|f(x_0)| \leqslant \|f\| \, \|x_0\| \leqslant \|x_0\|$ 知道

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1, f \in X^*} |f(x_0)| \leqslant \|x_0\| .$$

另一方面, 由推论 2.4.1, 存在 $f \in X^*, \|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$. 故

$$\|x_0\| \leqslant \sup_{\|f\| \leqslant 1, f \in X^*} |f(x_0)| .$$

所以等式 (2.4.7) 成立.

上述定理和推论在理论上和应用上都有重要意义. 这里让我们介绍它们在逼近论方面的应用.

定义 2.4.3 设 X 是线性赋范空间, E 是 X 的子集合, $x \in X$. 称 $y \in E$ 是 x 关于 E 的最佳逼近元, 若

$$\|x - y\| = \inf_{z \in E} \|x - z\|. \tag{2.4.8}$$

例 2.4.1 设 $E \subset C[0,1]$, E 是 $[0,1]$ 上定义的任意阶多项式全体构成的线性子空间. 取 $x(t) = e^t \in C[0,1]$. 尽管 $d(x, E) = 0$, 但不存在 $y \in E$, 使得 $\|x - y\| = 0$. 因为 e^t 不是多项式. 这说明不存在 e^t 关于 E 的最佳逼近元.

定理 2.4.4 设 X 是线性赋范空间, E 是 X 的闭线性子空间, $x_0 \notin E$, 则 $y \in E$ 是 x_0 关于 E 的最佳逼近元当且仅当存在 $f \in X^*, \|f\| = 1, f(x) = 0, \forall x \in E$ 并且 $f(x_0) = \|x_0 - y\|$.

证明 若 y 是 x_0 关于 E 的最佳逼近元, 即

$$\|x_0 - y\| = \inf_{z \in E} \|x_0 - z\| = d,$$

E 闭, 因此 $d > 0$. 设 $E_1 = \operatorname{span}\{x_0, E\}$, 则 $\forall x_1 \in E_1, x_1 = z + \alpha x_0$, 其中 $z \in E$, $\alpha \in \Phi$. 令 $f_0(x_1) = \alpha d$, $\forall x_1 = z + \alpha x_0 \in E_1$, 则 f_0 是 E_1 上的线性泛函, $f_0(E) = 0, f_0(x_0) = d$. 由于任何 $x_1 \in E_1$,

$$|f_0(x_1)| = |\alpha| d \leqslant |\alpha| \left\| \frac{z}{\alpha} + x_0 \right\| = \|z + \alpha x_0\| = \|x_1\|,$$

所以 $\|f_0\| \leqslant 1$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $z \in E$ 使得 $\|x_0 - z\| < d + \varepsilon$, 则

$$\|f_0\| \geqslant \left| f_0 \left(\frac{x_0 - z}{\|x_0 - z\|} \right) \right| = \frac{|f_0(x_0)|}{\|x_0 - z\|} \geqslant \frac{d}{d + \varepsilon},$$

ε 是任意的, 于是 $\|f_0\| = 1$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f \in X^*$, 使得在 E_1 上 $f(x) = f_0(x)$. 特别地 $f(E) = f_0(E) = 0$, 从而

$$f(x_0) = f_0(x_0) = d = \|x_0 - y\|.$$

反之, 若 $f \in X^*$ 满足定理中条件, 则 $\forall z \in E$,

$$\|x_0 - y\| = |f(x_0)| = |f(x_0 - z)| \leqslant \|x_0 - z\|.$$

由于 $y \in E$, 故 $\|x_0 - y\| = \inf_{z \in E} \|x_0 - z\|$. 证毕.

定理 2.4.4 实际上是最佳逼近元的判定定理. 下面定理给出了最佳逼近元存在的一个充分条件.

定理 2.4.5 设 X 是线性赋范空间, E 是 X 的有限维子空间, 则 $\forall x \in X$, x 关于 E 的最佳逼近元存在.

证明 $\forall y_0 \in E$，考虑集合

$$F = \{z \in E : ||x - z|| \leqslant ||x - y_0||\},$$

则 F 是 E 中的有界闭集, E 是有限维的, 从而 F 是紧集并且容易知道 $d(x,E) = d(x,F)$. 取 $z_n \in F$ 使得 $||x - z_n|| \to d(x,F)$, 此时存在子序列 $z_{n_k} \to z_0 \in F$, 从而

$$||x - z_0|| = \lim_{n_k \to \infty} ||x - z_{n_k}|| = d(x,E),$$

由定理 2.4.4, z_0 是 x 关于 E 的最佳逼近元.

例 2.4.2 考虑实空间 $C[a,b]$ 和由 $\{1, t, \cdots, t^n\}$ 张成的子空间 E_n, 则 $\forall x \in C[a,b]$, x 到 E_n 的最佳逼近元存在. 即至少存在一组系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 使得多项式 $y(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ 满足

$$||x - y|| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| = d(x, E_n).$$

例 2.4.3 对于复空间 $L^2[-\pi,\pi]$, 若 E_n 是由 $\{e^{ikt} : -n \leqslant k \leqslant n\}$ 张成的线性子空间, 则 $\forall x \in L^2[-\pi,\pi]$, 存在一组系数 $c_k, -n \leqslant k \leqslant n$ 使得三角多项式 $y(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ 满足

$$||x - y||_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x(t) - y(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = d(x, E_n).$$

有了最佳逼近元的存在性和判别定理, 自然会考虑到唯一性问题. 为此我们需要另一个新的概念.

定义 2.4.4 线性赋范空间 X 称为是严格凸的, 若 $\forall x, y \in X$, 当 $x \neq y$, $||x|| = ||y|| = 1$ 时

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1. \tag{2.4.9}$$

从几何直观上来看, 严格凸空间的单位球面上任意两点的中点都不在球面上. 严格凸的概念在逼近论中时常用到. 我们先给出严格凸空间的例子.

例 2.4.4 空间 $L^p[a,b]$ $(1 < p < \infty)$ 是严格凸的.

若存在 $x, y \in L^p[a,b]$, $||x||_p = ||y||_p = 1$, 并且 $||x+y||_p = 2$, 即 $||x+y||_p = ||x||_p + ||y||_p$. 由例 1.2.1 知道 Minkowski 不等式中等号成立, 当且仅当 $x(t) =$

$k\ y(t)$,a.e., 其中 k 为非负常数. 由 $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$ 知道 $k = 1$, 故 $x = y$. 这与严格凸性的定义矛盾.

同样地, 空间 $l^p(1 < p < \infty)$ 是严格凸的.

Hilbert 空间是严格凸的, 这可以由平行四边形公式直接得到.

例 2.4.5 l^1 不是严格凸的. 实际上取 $x = (1, 0, 0, \cdots), y = (0, 1, 0, \cdots)$, 则 $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$, 但 $\|x + y\|_1 = 2$.

l^∞ 也不是严格凸的. 实际上, 取 $x = (1, 0, 0, \cdots), y = (1, -1, 0, \cdots)$, 则 $x \neq y, \|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1, \|x + y\|_\infty = 2$.

此外空间 $c, c_0, L_1[a, b], L_\infty[a, b], C[a, b]$ 也不是严格凸的, 这里不一一验证了.

定理 2.4.6 设 X 是 Banach 空间, 则以下条件等价:

(1) X 是严格凸的.

(2) 对于 X 中的任何闭凸集 E 和 $x \in X$, x 关于 E 至多有一个最佳逼近元.

(3) $\forall f \in X^*$, 闭单位球 $S(X)$ 上至多有一点 x_0 使得 $f(x_0) = \|f\|$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 不妨设 $x \notin E$, 若有 $y, y' \in E$ 同时使

$$\|x - y\| = \|x - y'\| = d(x, E) = d,$$

则此时

$$\left\|\frac{1}{2}(y + y') - x\right\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - y\| + \frac{1}{2}\|x - y'\| \leqslant d(x, E).$$

但 E 是凸集, 从而 $\frac{1}{2}(y + y') \in E$, 故应有 $\left\|\frac{1}{2}(y + y') - x\right\| \geqslant d(x, E)$, 于是

$$\left\|\frac{1}{2}(y + y') - x\right\| = d(x, E) = d.$$

记 $z = \dfrac{x - y}{d}$, $z' = \dfrac{x - y'}{d}$, 则 $\|z\| = \|z'\| = 1$. 但 $\left\|\dfrac{z + z'}{2}\right\| = 1$ 与严格凸性相矛盾.

(2)$\Rightarrow$ (3). 若两点 $y, y' \in S(X)$ 使得 $f(y) = f(y') = \|f\|$, 不妨设 $\|f\| = 1$. 考虑闭凸集 $[y, y'] = \{z \in X : z = ty + (1 - t)y', 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. 则 $f(z) = f(ty + (1 - t)y') = 1, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 从而 $1 \leqslant |f(z)| \leqslant \|f\|\,\|z\| \leqslant \|z\|$. 另一方面, $\|z\| \leqslant t\,\|y\| + (1 - t)\,\|y'\| = 1$, 故 $\|z\| = 1$, 这说明 0 点到 $[y, y']$ 有无穷多个最佳逼近元, 与 (2) 矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (1). 若 X 不是严格凸的, 则有 $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = \left\|\dfrac{x + y}{2}\right\| = 1$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f \in X^*, \|f\| = 1, f\left(\dfrac{x + y}{2}\right) = 1$. 此时由 $|f(x)| \leqslant 1, |f(y)| \leqslant 1$, $\dfrac{1}{2}(f(x) + f(y)) = 1$, 故必有 $f(x) = f(y) = 1$. 从而对于任何 $t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, $f(tx + (1 - ty)) = 1$, 与 (3) 矛盾.

根据定理 2.4.5, 定理 2.4.6, 例 2.4.3 中的最佳逼近元是唯一的.

对于严格凸性的另一个应用, 我们考虑线性泛函延拓的唯一性问题. Hahn-Banach 定理解决了延拓的存在性, 但一般来说, 唯一性并不成立.

例 2.4.6 在 $\mathbf{R}^2$ 中定义范数

$$\|(x_1,x_2)\| = |x_1| + |x_2|, \qquad \forall (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

$G = \{(x_1,0) : x_1 \in \mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的线性子空间, $f_0(x_1,0) = x_1$ 是 G 上的线性泛函. 由 $|f_0(x_1,0)| = |x_1| = \|(x_1,0)\|$ 容易知道 $\|f_0\| = 1$, 故 f_0 连续.

对于任何实数 $\beta, F(x_1,x_2) = x_1 + \beta x_2$ 都是 f_0 的延拓, 即

$$\begin{aligned}|F(x_1,x_2)| &\leqslant |x_1| + |\beta|\,|x_2| \leqslant \max\{1,|\beta|\}(|x_1|+|x_2|)\\ &= \max\{1,|\beta|\}\,\|(x_1,x_2)\|.\end{aligned}$$

于是当 $|\beta| \leqslant 1$ 时 F 是保持范数的延拓, 这种延拓的个数有不可数无穷多个.

这里我们给出一个保证线性泛函延拓唯一性的等价条件, 而将其证明略去.

定理 2.4.7 设 X 是线性赋范空间, 为了使 X 的每个线性子空间上的连续线性泛函都有唯一的保持范数的延拓必须并且只须共轭空间 X^* 是严格凸的.

2.5 凸集的隔离定理

凸集的隔离定理又称为 Hahn-Banach 定理的几何形式. 它在规划论、控制论与 Banach 空间几何理论等方面都有重要的应用.

首先让我们考虑平面上的情况. 若 A, B 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的两个不相交凸集, 我们一定可以用一条直线将二者隔离开来. 即存在直线 $ax+by=c$, 使得对于 A 中的每个点 (x,y) 有 $ax+by \leqslant c$, 对于 B 中的每个点 (x,y) 有 $ax+by \geqslant c$(见图 2.1). 同样地, 三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的两个不相交凸集可以用一个平面来隔离.

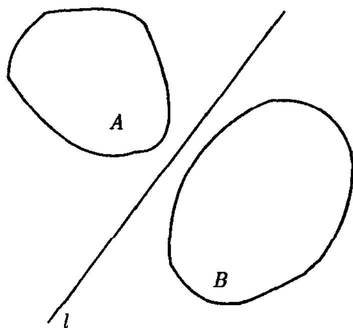


图 2.1

对于一般线性空间中的凸集, 我们有理由提出类似的问题. 但是有两个更基本的问题需要解决: 用什么将一般线性空间中的凸集隔开? 怎样才算将两个凸集隔开?

定义 2.5.1 设 X 是线性空间, $E \subset X$ 是某个集合.

(1) 称 E 是线性流形, 若 $E = x_0 + M$, 其中 M 是 X 的线性子空间.

(2) 称线性子空间 E 是 X 的极大真子空间, 若对于 X 的任一线性子空间 W, 当 $E \subset W$ 并且 $E \neq W$ 时, 必有 $W = X$.

(3) 称 E 是 X 的超平面, 若 $E = x_0 + E$, 其中 E 是 X 的极大真子空间.

X 上的线性泛函 (未必连续) 全体记为 X', 显然就点集的包含关系来讲, $X^* \subset X'$. 有时称 X' 是 X 的代数共轭, 称 X^* 是 X 的拓扑共轭.

定理 2.5.1 (1) E 是 X 的极大真子空间当且仅当存在 $f \in X', f \neq 0$, $E = N(f)$, 后者是 f 的零空间.

(2) E 是 X 的超平面当且仅当存在 $f \in X'$ 和常数 c, 其中 $f \neq 0, E = \{x : f(x) = c\}$.

证明 (1) 若 $f \in X', f \neq 0$, 则 $N(f)$ 是 X 的线性子空间. 若 W 是线性子空间并且 $N(f) \subset W$ 而 $N(f) \neq W$. 取 $x_0 \in W \backslash N(f)$, 显然 $f(x_0) \neq 0$. 此时 $\forall x \in X$, 令 $x = \dfrac{f(x)}{f(x_0)} x_0 + y$, 则 $f(y) = 0$, 所以 $y \in N(f)$. 从而 $X = \operatorname{span}\{x_0, N(f)\} \subset W$, 即 $W = X$. $N(f)$ 是极大真子空间.

反之, 若 E 是极大真子空间, 取 $x_0 \notin E$, 则 $X = \operatorname{span}\{x_0, E\}$. $\forall x \in X, x = x_1 + \alpha x_0$, 其中 $x_1 \in E, \alpha \in \varPhi$. 此表达式是唯一的. 定义 $f(x) = \alpha, \forall x = x_1 + \alpha x_0$. 显然 $E = N(f)$.

(2) 若 E 是超平面, 则 $E = x_0 + W, W$ 是极大真子空间. 由 (1), 存在 $f \in X', f \neq 0$, $W = N(f)$, 从而 $x \in E$, 当且仅当 $f(x) = f(x_0) = c$, 此即 $E = \{x : f(x) = c\}$.

若 $E = \{x : f(x) = c\}, f \in X', f \neq 0$, 任取 $x_0 \in E$, 则 $f(x_0) = c$. 令 $y = x - x_0$, 则 $f(y) = 0, y \in N(f)$. 由 (1), $N(f)$ 是极大真子空间, $E = x_0 + N(f)$, E 是超平面.

定理 2.5.2 设 X 是线性赋范空间, $E \subset X$ 是极大真子空间, $f \in X', f \neq 0$, E 与 f 的关系如同定理 2.5.1, 则 E 是闭的当且仅当 $f \in X^*$, 或者 E 不在 X 中稠密.

证明 由于 $E = N(f)$, 全部结论可由定理 2.5.1 得出.

通常称实空间 X 的子集 A 在超平面 $E = \{x : f(x) = a\}$ 的一侧, 若 $A \subset \{x : f(x) \leqslant a\}$ 或 $A \subset \{x : f(x) \geqslant a\}$. 称两个子集 A, B 被超平面 E 隔离, 若 A, B 分属于 E 的两侧. 若上述集合中严格不等号成立, 则称 A, B 被 E 严格隔离.

下面我们来着手证明凸集的隔离定理, 不过我们还需要一个工具 —— 凸集的 Minkowski 泛函. 在 2.4 节中证明 Hahn-Banach 延拓定理时, 我们曾经事先假定 X 上存在某个正齐性次可加泛函. 现在为了证明凸集的隔离定理, 我们将从 X 的满足一定条件的凸集上产生这种泛函.

定理 2.5.3 设 X 是线性赋范空间, $A \subset X$ 是以 0 为内点的凸集, 定义

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}, \tag{2.5.1}$$

则

(1) μ_A 在整个 X 上有定义.

(2) 若 $t \geqslant 0, \mu_A(tx) = t\mu_A(x), \forall x \in X$.

(3) $\mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y), \forall x, y \in X$.

(4) $A \subset \{x : \mu_A(x) \leqslant 1\}$. 若 A 是开集, 则 $A = \{x : \mu_A(x) < 1\}$.

称 μ_A 是集合 A 的 Minkowski 泛函.

证明 (1) $\forall x \in X, \dfrac{x}{n} \to 0$. A° 是 $0 \in X$ 的邻域, 故存在 $n_0, \dfrac{x}{n_0} \in A^\circ \subset A$, 即 $x \in n_0 A$, 所以 $\mu_A(x)$ 是有限实数.

(2) 由于 $x \in rA$, 当且仅当 $tx \in trA$, 故

$$\begin{aligned} t\mu_A(x) &= t\inf\{r > 0 : x \in rA\} = \inf\{tr : x \in rA\} \\ &= \inf\{tr : tx \in trA\} = \mu_A(tx). \end{aligned}$$

(3) 若 $x \in rA,\ y \in sA$, 即 $\dfrac{x}{r} \in A,\ \dfrac{y}{s} \in A$. A 是凸集, 故

$$\frac{x+y}{r+s} = \frac{r \cdot \dfrac{x}{r} + s \cdot \dfrac{y}{s}}{r+s} \in A,$$

即 $x + y \in (r+s)A$, 从而 $\mu_A(x+y) \leqslant r + s$. r 与 s 是使 $x \in rA,\ y \in sA$ 成立的任意数, 故 $\mu_A(x+y) \leqslant \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

(4) 由 μ_A 的定义知 $A \subset \{x : \mu_A(x) \leqslant 1\}$. 现在设 A 是开集, 若 $\mu_A(x) < 1$, 则存在 $r, 0 < r < 1,\ x \in rA$ 或 $\dfrac{x}{r} \in A$. A 是凸集, $0 \in A$, 从而 $x = (1-r)0 + r \cdot \dfrac{x}{r} \in A$. 故 $\{x : \mu_A(x) < 1\} \subset A$. 反之若 $x \in A$, 一定有 $\varepsilon > 0$, 使得 $(1+\varepsilon)x \in A$ 或 $x \in \dfrac{1}{1+\varepsilon}A$, 从而 $\mu_A(x) \leqslant \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$, 故 $A \subset \{x : \mu_A(x) < 1\}$. 以上两点说明等号成立.

定理 2.5.4 设 X 是 (实或复) 线性赋范空间, A, B 是 X 的非空凸子集, $A^\circ \neq \varnothing, A^\circ \bigcap B = \varnothing$. 则存在非零线性泛函 $f \in X^*$ 和实数 r 使得

$$A \subset \{x : \mathrm{Re}f(x) \leqslant r\}, \qquad B \subset \{x : \mathrm{Re}f(x) \geqslant r\}, \tag{2.5.2}$$

其中 $\mathrm{Re}f(x)$ 表示 $f(x)$ 的实部.

证明 不妨先作两点简化: 一是可以假设 $0 \in A^\circ$. 因为当 f, r 满足 (2.5.2) 时, $\forall x_0 \in X$,

$$x_0 + A \subset \{x : \mathrm{Re}f(x) \leqslant \mathrm{Re}f(x_0) + r\},$$

$$x_0 + B \subset \{x : \mathrm{Re}f(x) \geqslant \mathrm{Re}f(x_0) + r\}.$$

特别地取 $x_0 \in A^\circ$, 并且考虑 $A - x_0$, 则至多改变 r 的值, 结论仍成立. 二是根据定理的表述形式只须就 X 是实空间的情况证明之, 因为由 2.4 节关于定理 2.4.2 的说明, 复空间上的一个实泛函决定唯一的复泛函并且成为它的实部.

现在考虑集合 $C = A^\circ + x_0 - B$, 其中 $x_0 \in B$. 则 C 是开凸集并且由于 $A^\circ \neq \varnothing$, $0 \in C$. 此外 $x_0 \notin C$, 否则 $0 \in A^\circ - B$, 从而得出 $A^\circ \bigcap B \neq \varnothing$, 与假设矛盾.

设 μ_C 是集合 C 的 Minkowski 泛函. 由定理 2.5.3, μ_C 是整个空间 X 上有定义的次可加正齐性泛函, 并且 $C = \{x : \mu_C(x) < 1\}$. 这说明 $\mu_C(x_0) \geqslant 1$.

考虑子空间 $M = \{tx_0 : t \in R\}$ 和 M 上的非零线性泛函 $f_0(tx_0) = t$. 当 $t \geqslant 0$ 时

$$f_0(tx_0) = t \leqslant t\mu_C(x_0) = \mu_C(tx_0).$$

当 $t \leqslant 0$ 时, 由于 $\mu_C(tx_0) \geqslant 0$, 显然 $f_0(tx_0) = t \leqslant \mu_C(tx_0)$. 根据定理 2.4.1, 存在 X 上的线性泛函 f, f 是 f_0 的延拓, 并且 $f(x) \leqslant \mu_C(x), \forall x \in X$.

f 是连续的. 实际上 $C \bigcap (-C)$ 是 0 点的邻域, 当 $x \in C \bigcap (-C)$ 时, 一方面 $f(x) \leqslant \mu_C(x) < 1$; 另一方面 $-f(x) \leqslant \mu_C(-x) < 1$. 总之

$$-1 < f(x) < 1, \qquad \forall x \in C \bigcap (-C).$$

故 f 连续. 又由 $x_0 \in M$ 知道, $f(x_0) = f_0(x_0) = 1$.

现在 $\forall x \in A^\circ, y \in B$, 则 $x + x_0 - y \in C$. 从而

$$f(x) + f(x_0) - f(y) = f(x + x_0 - y) \leqslant \mu_C(x + x_0 - y) \leqslant 1,$$

由此得出 $f(x) \leqslant f(y)$. 记 $r = \sup\limits_{x \in A} f(x)$, 则 $f(x) \leqslant r, \forall x \in A^\circ$, 同时 $r \leqslant f(y), \forall y \in B$.

由于 $A^\circ \subset \{x : f(x) \leqslant r\}$ 并且后者是闭集, 故 $\overline{A^\circ} \subset \{x : f(x) \leqslant r\}$. 但对于凸集而言 $\overline{A^\circ} = \overline{A}$, 所以 $A \subset \{x : f(x) \leqslant r\}$. 证毕.

定理 2.5.5　设 X 是 (实或复) 线性赋范空间, A, B 是 X 中的非空凸子集, A 是紧集, B 是闭集, $A \bigcap B = \varnothing$. 则存在 $f \in X^*$ 和实数 $r_1, r_2, r_1 < r_2$, 使得

$$A \subset \{x : \mathrm{Re}f(x) \leqslant r_1\}, \qquad B \subset \{x : \mathrm{Re}f(x) \geqslant r_2\}. \tag{2.5.3}$$

此时 A, B 被严格隔离.

证明　同样只需对实空间证明结论成立. 注意此时

$$d = d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) > 0,$$

于是 $A+O\left(0,\dfrac{d}{2}\right)$ 是开凸集, 且 $\left(A+O\left(0,\dfrac{d}{2}\right)\right)\bigcap B=\varnothing$. 这里 $O\left(0,\dfrac{d}{2}\right)$ 是以 0 为中心, $\dfrac{d}{2}$ 为半径的球. 根据定理 2.5.4, 存在连续线性泛函 f 和 $r_2\in\mathbf{R}$, 使得

$$A+O\left(0,\frac{d}{2}\right)\subset\{x:f(x)\leqslant r_2\},\qquad B\subset\{x:f(x)\geqslant r_2\}.$$

注意 A 是紧集, f 连续, 故 f 在 A 上可达到上确界, 不妨设

$$f(x_0)=\sup_{x\in A}f(x)=r_1,\qquad x_0\in A.$$

由于 f 不是零泛函, 于是 f 在 $O\left(0,\dfrac{d}{2}\right)$ 上取值不可能全为 0. 不失一般性, 设有 $x'\in O\left(0,\dfrac{d}{2}\right)$, $f(x')>0$, 则 $x_0+x'\in A+O\left(0,\dfrac{d}{2}\right)$, 从而

$$\sup_{x\in A}f(x)=r_1<r_1+f(x')=f(x_0+x')\leqslant r_2.$$

证毕.

作为 Hahn-Banach 定理和隔离定理的应用, 让我们来看一下 Helly 第一和第二矩量定理.

定理 2.5.6 (Helly) 设 X 是线性赋范空间, $\{x_n\}\subset X$ 是一列元素, $\{\alpha_n\}\subset\Phi,\beta>0$. 则存在 $f\in X^*,\|f\|\leqslant\beta$, $f(x_n)=\alpha_n\ (n\geqslant 1)$ 的充要条件是不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\right|\leqslant\beta\left\|\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right\| \tag{2.5.4}$$

对于任意正整数 n 及 $k_i\in\Phi$ 成立.

证明 (1) 若满足所说条件的 $f\in X^*$ 存在, 则

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\right|&=\left|\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i)\right|=\left|f\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right)\right|\\&\leqslant\|f\|\left\|\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right\|\leqslant\beta\left\|\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right\|,\quad\forall n\geqslant1,\quad k_i\in\Phi.\end{aligned}$$

(2) 若不等式 (2.5.4) 成立, 设 $E=\operatorname{span}\{x_n:n\geqslant 1\}$. 令 $f_0(x_i)=\alpha_i,i>1$, 则 $\forall n$,

$$f_0\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right)=\sum_{i-1}^{n}k_i\alpha_i,\qquad\forall x=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i.$$

这里 $\{x_n\}$ 未必是线性无关的, 但若另有 $x=\sum_{j=1}^{m}s_jx_j$, 则 (2.5.4) 表明

$$\left|\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i-\sum_{j=1}^{m}s_j\alpha_j\right|\leqslant\beta\left\|\sum_{i=1}^{n}k_ix_i-\sum_{j=1}^{m}s_jx_j\right\|=0.$$

由此知道 $f_0(x)$ 有确定的意义. 此外 $\|f_0\|\leqslant\beta$ 显然.

由定理 2.5.3, 存在 $f\in X^*$, $\|f\|=\|f_0\|\leqslant\beta$, 在 E 上 $f(x)=f_0(x)$. 特别地 $f(x_n)=\alpha_n,\forall n\geqslant 1$. 证毕.

定理 2.5.7 (Helly)　设 X 是 Banach 空间, $f_1,\cdots,f_n\in X^*,M>0,c_1,\cdots,c_n\in\Phi$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $x_\varepsilon\in X$, 使得 $\|x_\varepsilon\|\leqslant M+\varepsilon,f_i(x_\varepsilon)=c_i(i=1,\cdots,n)$ 的充要条件是 $\forall\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\Phi$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_ic_i\right|\leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i\right\|.\tag{2.5.5}$$

证明　必要性. 若 $\forall\varepsilon>0$, x_ε 存在, 即 $\|x_\varepsilon\|\leqslant M+\varepsilon,f_i(x_\varepsilon)=c_i(i=1,\cdots,n)$, 则 $\forall\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\Phi$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_ic_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i(x_\varepsilon)\right|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i\right\|\|x_\varepsilon\|\leqslant(M+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i\right\|.$$

ε 是任意的, 故 (2.5.2) 成立.

充分性. 不妨设 $f_1,\cdots,f_n$ 彼此线性无关, 否则考虑其中的极大线性无关组 $f_1,\cdots,f_m$, 当对于后者证明了定理的结论时, 根据线性相关条件, 结论对于整个 $f_1,\cdots,f_n$ 也一定成立. 此外, 我们仅就 X 为实空间的情况进行证明, 对于复空间, 只须稍作修正.

考虑映射 $T:X\to\mathbf{R}^n,T(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$, $x\in X$. 容易验证 T 是有界线性算子并且是到上的. 实际上 $T(X)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的线性子空间, 若 $\dim T(X)<n$, 则存在不全为 0 的 n 个数 $a_1,\cdots,a_n$, $\sum_{i=1}^{n}a_if_i(x)=0,\forall x\in X$. 于是 $\sum_{i=1}^{n}a_if_i=0$, 与 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关矛盾.

$X,\mathbf{R}^n$ 都是 Banach 空间, 于是 T 是开映射.

$\forall\varepsilon>0$, 记 $E_\varepsilon=\{x:\|x\|\leqslant M+\varepsilon\}$, 则 $E_\varepsilon^\circ=\{x:\|x\|<M+\varepsilon\}$ 是 $0\in X$ 的邻域. 于是 $T(E_\varepsilon^\circ)$ 是 $0\in\mathbf{R}^n$ 的邻域, 即 $0\in\mathbf{R}^n$ 是 $T(E_\varepsilon)$ 的内点. 若不存在 $x_\varepsilon\in E_\varepsilon$, 使得 $f_i(x_\varepsilon)=c_i(i=1,\cdots,n)$, 即

$$c=(c_1,\cdots,c_n)\overline{\in}T(E_\varepsilon).$$

注意到 $T(E_\varepsilon)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的凸集, 由隔离定理 2.5.4, 存在 $\mathbf{R}^n$ 上的实连续线性泛函 F 和实数 $r(r>0)$ 使得

$$F(Tx)\leqslant r,\quad \forall x\in E_\varepsilon,\quad F(c)>r.$$

由例 2.1.1, 不妨设 $F(y)=b_1y_1+\cdots+b_ny_n,\forall(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, 其中 $b_1,\cdots,b_n\in\mathbf{R}$. 则 $F(Tx)=\sum\limits_{i=1}^n b_if_i(x)$. 注意 $x\in E_\varepsilon$ 当且仅当 $-x\in E_\varepsilon$, 故必有

$$\left|\sum_{i=1}^n b_if_i(x)\right|=|F(Tx)|\leqslant r.$$

于是

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\|\leqslant M+\varepsilon}\left|\sum_{i=1}^n b_if_i(x)\right|&=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^n b_if_i(x)\right|(M+\varepsilon)\\&=(M+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^n b_if_i\right\|\leqslant r<F(c)=\left|\sum_{i=1}^n b_ic_i\right|,\end{aligned}$$

$f_1,\cdots,f_n$ 线性无关, 故 $\left\|\sum\limits_{i=1}^n b_if_i\right\|\neq 0$, 从而

$$M\left\|\sum_{i=1}^n b_if_i\right\|<\left|\sum_{i=1}^n b_ic_i\right|.$$

与定理中条件矛盾. 证毕.

习　题　2

1. 设 X,Y 是线性赋范空间, $T:X\to Y$ 是线性算子, 则 T 不是连续的, 当且仅当 $\exists x_n\in X$, 使得 $x_n\to 0$, 但 $\|x_n\|\to\infty$.

2. 对于每个 $g\in V[a,b]$, 定义

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t),\qquad \forall x\in C[a,b],$$

则 f 是 $C[a,b]$ 上的连续线性泛函.

3. 证明下面定义的 f 是线性泛函并且求 $\|f\|=$?

(1) $n_0\in N, f(x)=x_{n_0},\forall x=(x_n)\in l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

(2) $t_0\in[a,b], f(x)=x(t_0),\forall x=x(t)\in C[a,b]$.

(3) $t_0 \in [a,b], f(x) = \int_a^{t_0} x(s)\mathrm{d}s, \forall x \in L^p[a,b] (1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

4. 对于每个 $\alpha \in L^\infty[a,b]$, 定义线性算子 $T: L^p[a,b] \to L^p[a,b]$,

$$(Tx)(t) = a(t)x(t), \quad \forall x \in L^p[a,b].$$

求 $||T|| =$?

5. 对于每个序列 (α_n) 定义线性算子 $T: l^p \to l^p$,

$$(x_1, x_2 \cdots)| \to (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots),$$

求 $||T|| =$?

6. 设 $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, r, p, q > 0, \alpha \in L^q$, 定义 $T: l^p \to l^r$,

$$(Tx)(t) = \alpha(t)x(t), \qquad \forall x \in L^p[a,b],$$

求 $||T|| =$?

7. 设 $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 无穷矩阵 (α_{kj}) 满足 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\right)^{\frac{q}{p}} < \infty$. 定义算子 $T: l^p \to l^q$, 当 $x = (x_n), y = Tx = (y_n)$ 时,

$$y_k = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{kj} x_j, \qquad k \geqslant 1.$$

证明 T 有界并求其范数.

8. 设 $(Tx)(t) = t^2 x(t)$, 若 T 是从 $L_2[0,1] \to L_1[0,1]$ 的算子, 计算 $||T||$; 若 T 是从 $L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ 的算子再求出 $||T||$.

9. 在 $C[0,1]$ 上定义

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\mathrm{d}t.$$

证明: (1) f 是连续的; (2) $||f|| = 1$; (3) 不存在 $x \in C[0,1], ||x|| \leqslant 1$, 使得 $f(x) = 1$.

10. 对于一般线性算子, 定理 2.1.1 中的 (1) 与 (6) 能否等价, 试举例说明之.

11. $C[a,b]$ 上的线性泛函 f 称为正泛函, 若 $x(t) \geqslant 0, \forall t \in [a,b]$, 则 $f(x) \geqslant 0$. 试证明 f 是正泛函当且仅当 f 连续并且 $||f|| = f(1)$. 这里的 1 代表函数 $x(t) \equiv 1$.

12. 设 $C_0(-\infty,\infty)$ 是在 $(-\infty,\infty)$ 上连续并且当 $|t| \to \infty$ 时 $x(t) \to 0$ 的函数全体, 以上确界为范数. 证明: 若 F 是 $C_0(-\infty,\infty)$ 上的正线性泛函, F 必为连续线性泛函.

13. 设 X, Y, Z 是线性赋范空间, $A \in B(Y,Z), B \in B(X,Y)$, 定义 $(AB)x = A(Bx)$, 则 $AB \in B(X,Z)$ 并且 $||AB|| \leqslant ||A||\,||B||$.

14. 由定理 2.1.5 的证明知道对于算子序列 T_n, 若 $||T_n - T|| \to 0$, 则 $\forall x \in X, ||T_n x - Tx|| \to 0$. 此命题的逆不成立, 试考虑算子序列

$$T_n: l^2 \to l^2, T_n(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots).$$

15. 设 X 是 Banach 空间, Y 是线性赋范空间, $T_n \in B(X,Y)$ 并且 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|T_n\| = \infty$, 则存在 $x_0 \in X$, 使得 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|T_n x_0\| = \infty$(称此点 x_0 是 T_n 的共鸣点).

16. 设 X, Y 是线性赋范空间, $T_n \in B(X,Y)$, A 是使 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|T_n x\| < \infty$ 的点 x 的全体, 则要么 $A = X$, 要么 A 是 X 中的第一纲集.

17. 考虑序列空间 $c_{00} = \{x : x = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots),\ \forall x_i \in \mathbf{R},\ n \geqslant 1\}$, 其中的每个元素 x 是至多有限多个不为 0 的数字构成的无穷序列, 并且 $\|x\| = \sup\limits_{n\geqslant 1}|x_n|, \forall x \in c_{00}$. 对于 c_{00} 上的算子序列 $T_m : c_{00} \to c_{00}, T_m(x) = (0, \cdots, 0, m x_m, 0, \cdots)$.

(1) 计算 $\|T_m\|$.

(2) 证明对于每个 $x \in c_{00}$, $\sup\limits_{m\geqslant 1}\|T_m x\| < \infty$.

(3) 证明 c_{00} 自身不是第二纲的.

将这一结论与共鸣定理对照.

18. 设 $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha(t)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数, 使得 $\forall x(t) \in L^p$, $\int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t$ 存在, 则 $\alpha(t) \in L^q, p^{-1} + q^{-1} = 1$.

19. 设 X, Y 是 Banach 空间, Z 是线性赋范空间, 映射

$$B : X \times Y \to Z, B(x,y) = z.$$

若对于每个固定的 $x_0 \in X$ 或 $y_0 \in Y$, $B(x_0, y)$ 与 $B(x, y_0)$ 分别是关于 y, x 连续的线性算子 (称 B 为双线性算子), 则 $B(x,y)$ 关于两个变元连续并且存在 $a > 0, \|B(x,y)\| \leqslant a\|x\|\|y\|$, $\forall x \in X, y \in Y$.

20. 设 X 是 Banach 空间, Y 是线性赋范空间, $T_n \in B(X,Y)$. 若 $\forall x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\sup\limits_{n}\|T_n x\| = 0$.

21. 设 X 是 Banach 空间, B_n, B 是 X 上的有界线性算子, 则 $B_n x \to Bx, \forall x \in X$, 当且仅当 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|B_n\| < \infty$, 并且在 X 的稠密子集 E 上 $B_n x \to Bx$.

22. 设 l_0^2 是 l^2 中至多有限多个坐标不为 0 的元素集合, 以 l^2 中的范数为范数. 令 $T : l_0^2 \to l_0^2, T(x_1, x_2 \cdots) = \left(x_1, \dfrac{x_2}{2}, \cdots, \dfrac{x_n}{n}, \cdots\right)$, 证明 T 是一一的有界的线性算子, 但 T^{-1} 不是有界的. 将此与逆算子定理对照.

23. 若 $\|\cdot\|$ 是 $C[a,b]$ 上的另一完备范数 (原范数记为 $\|\cdot\|_\infty$), 并且当 $\|x_n - x\| \to 0$ 时必有 $|x_n(t) - x(t)| \to 0, \forall t \in [a,b]$, 则 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_\infty$ 等价.

24. 设 X, Y 是线性赋范空间, $T : X \to Y$ 是线性算子, 则 $G(T)$ 闭当且仅当 $\forall x_n \to 0$, $Tx_n \to y$ 时, $y = 0$.

25. 设 X 是 Banach 空间, $E_1, E_2 \subset X$ 是闭线性子空间, 并且 $\forall x \in X, x = x_1 + x_2$ 的分解是唯一的, 其中 $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, 则存在 $a > 0$, 使得

$$\|x_1\| \leqslant a\|x\|, \quad \|x_2\| \leqslant a\|x\|, \quad \forall x = x_1 + x_2.$$

26. 若 $T: X \to Y$ 是闭算子, 则

(1) $N(T) = \{x : Tx = 0\}$ 是 X 的闭线性子空间.

(2) 若 T^{-1} 存在, 则 T^{-1} 是闭算子.

(3) T 将 X 中的紧集映射为 Y 中的闭集.

(4) Y 中的紧集的逆像是 X 中的闭集.

27. (Hellinger-Toeplitz)　设 H 是 Hilbert 空间, $A: H \to H$ 是线性算子, 并且 $(x, Ay) = (Ax, y), \forall x, y \in H$, 则 $A \in B(H)$.

28. 设 X 是线性赋范空间, $E_1, E_2 \subset X$ 是线性子空间.

(1) 若 $X = E_1 + E_2, E_1 \bigcap E_2 = \{0\}$, 则存在 $T: E_2 \to X/E_1, T$ 是一一的到上的线性映射.

(2) 若 X 是 Banach 空间, $E_1, E_2 \subset X$ 是闭子空间, 则 T 是到上的并且 T, T^{-1} 连续.

29. (算子延拓定理)　设 X, Y 是线性赋范空间, $\tilde{X}, \tilde{Y}$ 分别是 X, Y 的完备化空间, 若 $T: X \to Y$ 是有界线性算子, 则存在 $\tilde{T}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$, 使得 $\tilde{T}(x) = T(x), \forall x \in X$, 并且 $\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|$, $\tilde{T}$ 是唯一的.

30. 设 X 是线性赋范空间, $E \subset X$ 是线性子空间, 则

(1) $x_0 \in \overline{E}$ 当且仅当 $\forall f \in X^*, f(E) = \{0\}$ 时, $f(x_0) = 0$.

(2) $\overline{E} = X$ 当且仅当 $\forall f \in X^*, f(E) = \{0\}$ 时, $f = 0$.

31. 应用闭图像定理证明：若 X, Y 是 Banach 空间, $T: X \to Y$ 是线性算子, 满足 $\forall f \in Y^*, fT \in X^*$, 则 T 一定是有界线性算子.

32. (Banach 极限定理)　设 B 是有界实数序列的全体：

$$B = \{x = \{x_n\} : x_n \in \mathbf{R},\ \sup_{n \geqslant 1} |x_n| < \infty\}, \qquad \|x\| = \sup_n |x_n|.$$

证明在 B 上存在有界线性泛函 f 使得

(1) $\varliminf_{n \to \infty} x_n \leqslant f(x) \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} x_n, \forall x = (x_n) \in B$.

(2) 若 $x = (x_n) \in c$, 则 $f(x) = \lim_{n \to \infty} x_n$.

33. 设 X, Y 是线性赋范空间, $X \neq \{0\}$. 若 $B(X, Y)$ 是 Banach 空间, 则 Y 是 Banach 空间.

34. 证明实线性赋范空间中的每个闭凸集都是某些半空间族的交, 后者是指形如 $\{x : f(x) \leqslant c\}$ 的集合, 其中 $f \in X^*, c \in \mathbf{R}$.

35. 设 X 是线性赋范空间, A, B 是 X 中的凸子集, 证明

(1) 若 $A^\circ \neq \varnothing$, 则 $\overline{A^\circ} = \overline{A}$.

(2) 若 $(A \bigcap B)^\circ \neq \varnothing$, 则 $\overline{A} \bigcap \overline{B} = \overline{A \bigcap B}$.

(3) 若 $A^\circ \neq \varnothing$, 则 $\forall x \in A^\circ, y \in A$, 点集

$$[x, y) = \{z \in X : z = tx + (1-t)y, 0 < t \leqslant 1\} \subset A^\circ.$$

36. 设 X 是线性赋范空间, $E\subset X$ 是极大真子空间, 则 E 要么是闭集, 要么在 X 中稠密.

37. 设 X 是线性赋范空间, $B\neq\varnothing$ 是开凸子集, $E\subset X$ 是线性子空间, $B\bigcap E=\varnothing$, 则存在 $f\in X^*, f(x)=0, \forall x\in E$, 但 $f(x)\neq 0, \forall x\in B$.

38. 设 X 是线性赋范空间, $x_1,\cdots,x_n\in X$ 彼此线性无关, 则存在 $f_1,\cdots,f_n\in X^*$, 使得 $f_i(x_j)=\delta_{ij}(\delta_{ii}=1;\delta_{ij}=0, i\neq j)$.

39. 设 $f_1,f_2\in X'$, 则 $N(f_1)=N(f_2)$ 当且仅当存在 $\lambda\neq 0, f_1=\lambda f_2$.

40. 设 X 是线性赋范空间, $f\in X^*, f\neq 0, E=\{x:f(x)=c\}, c\neq 0$, 则 $||f||\,d(0,E)=|c|$.

41. 试说明 $E=\left\{x=(x_n)\in c_0:\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{2^n}=0\right\}$ 是 c_0 的线性子空间, 但 $\forall x\,\overline{\in}\,E$, x 关于 E 无最佳逼近元.

42. 称线性赋范空间 X 具有可数决定集, 若存在 $E=\{x_n^*:n\geqslant 1\}\subset X^*$, 使得 $\forall x\in X, ||x||=\sup\limits_n|x_n^*x|$. 证明当 X 可分时, X 与 X^* 都具有可数决定集. 特别地, X^* 可分时, X 具有可数决定集.

43. 设 $\{\alpha_n\}$ 是一列标量, 证明存在 $\alpha(t)\in V[a,b]$, 使得

$$\int_a^b t^n\mathrm{d}\alpha(t)=\alpha_n,\qquad \forall n\geqslant 0$$

成立的充要条件是对于任何多项式 $p(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_it^i$,

$$\left|\sum_{i=0}^{n}c_i\alpha_i\right|\leqslant M\max_{a\leqslant t\leqslant b}|P(t)|\,.$$

44. 设 X 是实线性赋范空间, E 是 X 的线性子空间, $x\in X$, 则

$$d(x,E)=\sup\{f(x):f\in X^*, ||f||\leqslant 1, f(E)=0\}.$$

45. 设 X 是线性赋范空间, $E\subset X$ 是线性子空间, f_n 是 E 上的一列线性泛函并且 $||f_n||\leqslant M<\infty$. 证明算子 $T:E\to l^\infty$,

$$Tx=(f_1(x),f_2(x),\cdots),$$

可以延拓到 X 上并且 $||T||=\sup\limits_n||f_n||$.

第3章　共轭空间与共轭算子

线性赋范空间与它的共轭空间之间的相互依赖关系是泛函分析中饶有兴趣的和内容丰富的论题. 共轭空间不仅仅是由原空间派生出的一种新空间, 而且提供了认识原空间的新工具. 本章将首先把共轭空间具体化 —— 给出某些共轭空间的表现, 然后引入由共轭空间引出的序列的弱收敛和弱* 收敛概念及有关性质, 讨论共轭算子和紧算子的基本性质, 最后阐述自反空间和一致凸空间的特殊属性. 事实上, 由于有了第 2 章的基本定理, 这些问题都可以比较深入地展开来讨论.

3.1　共轭空间及其表现

前面已经讲过, 对于任一非零线性赋范空间 X, X 上不仅存在非零的连续线性泛函, 而且其全体 (即共轭空间 X^*) 构成一个Banach 空间, 它们多到可以区分 X 中的点. 此外, 对于每个 $f \in X^*$, 我们有

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1, x \in X} |f(x)|.$$

对于每个 $x \in X$, 又有

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1, f \in X^*} |f(x)|.$$

这些公式反映了线性赋范空间与它的共轭空间之间的对偶关系. 二者之间的相互作用远不止这些. 另外, 作为线性赋范空间, X^* 也存在共轭空间, 记为 X^{**}, 称 X^{**} 为 X 的二次共轭空间. 类似地还有 X^{***} 等.

在对共轭空间及其有关性质作进一步研究之前, 我们需要对它的抽象形式做一番直观化的工作. 我们记得在第 1 章中曾经叙述过两个线性赋范空间的等距同构概念, 等距同构的两个空间除了符号不同之外是无法区别的, 在这种意义上我们说两个空间相等. 在研究抽象空间的时候, 有时我们不去研究这个空间本身, 而是去研究一个与之等距同构的具体空间, 后者称为前者的表现. 同时也称具体空间的每个元素是抽象空间对应元素的表现.

举例来说, 在 2.1 节中我们知道 Φ^n 上的线性泛函的一般形式是

$$f(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \qquad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Phi^n,$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个标量. 不同的 f 对应有不同的 n 数组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. 如果 Φ^n 上采用欧氏范数, 直接计算可以求出 $\|f\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 若将 Φ^n 上的线性泛函 f 与 Φ^n 中的点 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 对应起来, 则 $(\Phi^n)^*$ 与 Φ^n 之间可以建立一一对应, 并且这种对应是到上的等距同构. 这样一来, $(\Phi^n)^*$ 中的元素可以通过一个 n 数组表现. 换句话说, Φ^n 本身就是 $(\Phi^n)^*$ 的表现. 在这种意义上我们说 $(\Phi^n)^*=\Phi^n$, 并且说 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是相应的 f 的表现.

现在让我们看一些进一步的例子.

定理 3.1.1 $(l^1)^*=l^\infty$.

证明 (1) 对于每个 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^\infty$, 定义

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n,\qquad \forall x=(x_n)\in l^1. \tag{3.1.1}$$

f 是 l^1 上的线性泛函, 并且

$$|f(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\ |x_n|\leqslant\sup_{n\geqslant1}|\alpha_n|\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\sup_{n\geqslant1}|\alpha_n|\,\|x\|,$$

从而 $\|f\|\leqslant\sup\limits_{n}|\alpha_n|=\|\alpha\|_\infty$.

(2) 反之, $\forall f\in(l^1)^*$, 取 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots)$, $n\geqslant1$. 易知 $e_n\in l^1$. 令 $\alpha_n=f(e_n)$, 首先

$$|\alpha_n|\leqslant\|f\|\,\|e_n\|=\|f\|,$$

若令 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$, 则 $\alpha\in l^\infty$ 并且

$$\|\alpha\|_\infty=\sup_{n}|\alpha_n|\leqslant\ \|f\|.$$

任取 $x=(x_i)\in l^1$, 设 $x^{(n)}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$, 则 $\left\|x^{(n)}-x\right\|=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|x_i|\to0$. 由 f 的连续性,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{(n)})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_ix_i,$$

这说明 (3.1.1) 是 l^1 上线性泛函的一般形式.

(3) 令 $T:(l^1)^*\to l^\infty$, $Tf=\alpha$. 由 (1) 知道, T 是到上的线性映射. (1) 与 (2) 一起说明 $\|Tf\|_\infty=\|\alpha\|_\infty=\|f\|$, $\forall f\in(l^1)^*$. 从而 T 又是一一映射, 并且 $(l^1)^*$ 与 l^∞ 等距同构, 即 $(l^1)^*=l^\infty$. 证毕.

类似地可以证明 $(l^p)^* = l^q, 1 < p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$.

根据 Hahn-Banach 定理 (见本节开头提到的式子) 可以得到

$$\|x\|_p = \sup_{\|\alpha\|_q \leqslant 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right|, \qquad \forall x = (x_n) \in l^p, \tag{3.1.2}$$

其中 $\alpha = (\alpha_n) \in l^q$.

定理 3.1.2　$L^p[a,b]^* = L^q[a,b], 1 < p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$.

证明　(1) 对于每个 $\alpha(t) \in L^q[a,b]$, 定义

$$f(x) = \int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall x(t) \in L^p[a,b], \tag{3.1.3}$$

f 是 $L^p[a,b]$ 上的线性泛函. 由Hölder 不等式,

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \|x\|_p \|\alpha\|_q,$$

故 $\|f\| \leqslant \|\alpha\|_q$.

(2) 若 $f \in L^p[a,b]^*$, 设 $\chi_t = \chi_{[a,t)}$ 是 $[a,t)$ 的特征函数, 记 $f(\chi_t) = g(t)$. 对于 $[a,b]$ 中的任一组区间 $[a_i, b_i]$,

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n \leqslant b,$$

记 $\varepsilon_i = \overline{(g(b_i) - g(a_i))}\ |(g(b_i) - g(a_i))|^{-1}\left(\text{约定 } \frac{0}{0} = 0 \right)$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (f(\chi_{b_i}) - f(\chi_{a_i})) \\
&\leqslant \|f\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\chi_{b_i} - \chi_{a_i}) \right\|_p \\
&= \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

当 $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ 很小时, $\sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)|$ 也很小, 故 $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 由 Lebesgue 积分的知识, $g'(t)$a.e. 存在, 记 $g'(t) = \alpha(t)$, $\alpha(t)$ 是可积函数并且

$$g(t) = g(a) + \int_a^t \alpha(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t \in [a,b].$$

但 $\chi_a = 0$ a.e., 故 $g(a) = f(\chi_a) = 0$, 所以

$$g(t) = \int_a^t \alpha(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t \in [a,b]. \tag{3.1.4}$$

若 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的阶梯函数, $x(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i(\chi_{t_i}-\chi_{t_{i-1}})$, $a_i \in \Phi$, $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i(f(\chi_{t_i}) - f(\chi_{t_{i-1}})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i(g(t_i) - g(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_a^b (\chi_{t_i} - \chi_{t_{i-1}})\alpha(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

若 $x(t)$ 是有界可测函数, 不妨设 $|x(t)| \leqslant M, t \in [a,b]$, 则存在阶梯函数列 $x_n(t)$,

$$|x_n(t)| \leqslant M, \qquad t \in [a,b],$$

使得 $x_n(t) \to x(t)$, a.e.. 由 Lebesgue 有界收敛定理,

$$\|x_n - x\|_p = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

此外 $x_n(t)\alpha(t) \to x(t)\alpha(t)$, a.e., 并且

$$|x_n(t)\alpha(t)| \leqslant M\,|\alpha(t)|\,.$$

对 (3.1.5) 两端取极限, 由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\alpha(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t,$$

即 (3.1.5) 对于有界可测函数成立.

现在证明 $\alpha(t) \in L^q[a,b]$. 实际上, 令

$$x_n(t) = \begin{cases} \overline{\alpha(t)}\,|\alpha(t)|^{q-2}, & |\alpha(t)|^{q-1} \leqslant n, \\ 0, & |\alpha(t)|^{q-1} > n, \end{cases}$$

$x_n(t)$ 是有界可测函数. 记 $E_n = \left\{t \in [a,b] : |\alpha(t)|^{q-1} \leqslant n\right\}$, 一方面有

$$|f(x_n)| \leqslant \|f\|\ \|x_n\|_p = \|f\| \left(\int_{E_n} |\alpha(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

另一方面

$$f(x_n) = \int_a^b x_n(t)\alpha(t)\mathrm{d}t = \int_{E_n} |\alpha(t)|^q \mathrm{d}t.$$

故

$$\int_{E_n} |\alpha(t)|^q \mathrm{d}t \leqslant \|f\| \left(\int_{E_n} |\alpha(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

即 $\left(\int_{E_n} |\alpha(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|$. n 是任意的, 所以

$$\left(\int_a^b |\alpha(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|, \qquad \alpha(t) \in L^q.$$

最后, $\forall x(t) \in L^p[a,b]$, 取

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & |x(t)| \leqslant n, \\ 0, & |x(t)| > n, \end{cases}$$

记 $B_n = \{t \in [a,b] : |x(t)| > n\}$, 则 B_n 的测度 $\mu(B_n) \to 0$, 然后由积分的绝对连续性,

$$\|x_n - x\|_p = \left(\int_{B_n} |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

从而

$$\left|\int_a^b x_n(t)\alpha(t)\mathrm{d}t - \int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \|x_n - x\|_p \|\alpha\|_q \to 0,$$

由此得出

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\alpha(t)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t.$$

这说明 (3.1.3) 是 $L^p[a,b]$ 上线性泛函的一般形式.

(3) 定义 $T: L^p[a,b]^* \to L^q[a,b]$, $Tf=\alpha, \forall f \in L^p[a,b]^*$. 由以上证明知道 T 是到上的等距同构, 从而也是一一映射, 故 $L^p[a,b]^* = L^q[a,b]$. 证毕.

类似地可以证明 $L^1[a,b]^* = L^\infty[a,b]$.

由 Hahn-Banach 定理得到

$$\|x\|_p = \sup_{\|\alpha\|_q \leqslant 1} \left| \int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t \right|, \qquad \forall x \in L^p[a,b], \tag{3.1.6}$$

其中 $\alpha \in L^q[a,b], p \geqslant 1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

下面定理称为 Riesz 表现定理.

定理 3.1.3 $C[a,b]^* = V_0[a,b]$.

证明 (1) 对于每个 $\alpha(t) \in V_0[a,b]$, 定义

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}\alpha(t), \qquad \forall x \in C[a,b]. \tag{3.1.7}$$

f 是 $C[a,b]$ 上的线性泛函, 并且

$$|f(x)| \leqslant \int_a^b |\mathrm{d}\alpha(t)| \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| = \mathop{V}_a^b(\alpha)\ \|x\|,$$

所以 $\|f\| \leqslant \mathop{V}_a^b(\alpha)$.

(2) 若 $f \in C[a,b]^*$, 考虑空间 $B[a,b]$, $B[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上有界函数的全体, 以上确界为范数. 显然 $C[a,b]$ 是 $B[a,b]$ 的线性子空间. 根据 Hahn-Banach 定理, 存在 f 的延拓 $F \in B[a,b]^*$, 在 $C[a,b]$ 上, $F(x)=f(x)$, 并且 $\|F\|=\|f\|$.

设 χ_t 是 $[a,t]$ 的特征函数, $g(t)=F(\chi_t)$,

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n \leqslant b.$$

令 $\varepsilon_i = \overline{(g(b_i)-g(a_i))}\ |(g(b_i)-g(a_i))|^{-1}\ \left(\dfrac{0}{0}=0\right)$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |g(b_i)-g(a_i)| &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (F(\chi_{b_i}) - F(\chi_{a_i})) \\ &\leqslant \|F\| \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\chi_{b_i} - \chi_{a_i}) \right\| = \|F\|.\end{aligned}$$

$g(t)$ 是有界变差函数, 并且 $\mathop{V}_a^b(g) \leqslant \|F\| = \|f\|$.

若 $x(t) \in C[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 是 $[a,b]$ 的分划, $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(t_i - t_{i-1}) < \delta$ 时, $|x(t_i) - x(t_{i-1})| < \varepsilon$. 令

$$x' = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)(\chi_{t_i} - \chi_{t_{i-1}}),$$

则 $x' \in B[a,b]$, 并且

$$\|x - x'\| = \sup_{i=1,\cdots,n} \sup_{t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i} |x(t) - x(t_i)| < \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b x\mathrm{d}g - F(x')\right| &= \left|\int_a^b x\mathrm{d}g - \sum_{i=1}^{n} x(t_i)(F(\chi_{t_i}) - F(\chi_{t_{i-1}}))\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} x\mathrm{d}g - \sum_{i=1}^{n} x(t_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |x(t) - x(t_i)|\,|\mathrm{d}g| \\
&\leqslant \varepsilon \mathop{V}_a^b(g) \leqslant \varepsilon \|f\|.
\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}
\left|F(x) - \int_a^b x\mathrm{d}g\right| &\leqslant |F(x) - F(x')| + \left|F(x') - \int_a^b x\mathrm{d}g\right| \\
&\leqslant \|\mathrm{F}\|\,\|x - x'\| + \varepsilon\|f\| \leqslant 2\|f\|\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

ε 是任意的, 故

$$F(x) = \int_a^b x\mathrm{d}g.$$

现在取 $\alpha(t)$ 是 $g(t)$ 的右连续修正, 即

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & t = a, \\ g(t+) - g(a), & a < t < b, \\ g(b) - g(a), & t = b, \end{cases} \tag{3.1.8}$$

其中 $g(t+)$ 是 g 在 t 处的右极限. 显然 α 在 (a,b) 上右连续, 故 $\alpha(t) \in V_0[a,b]$. 我们证明 $\mathop{V}\limits_a^b(\alpha) \leqslant \mathop{V}\limits_a^b(g)$, 并且

$$\int_a^b x\mathrm{d}g = \int_a^b x\mathrm{d}\alpha, \qquad \forall x \in C[a,b].$$

实际上, $g(t)$ 的不连续点是可数的, $\forall\varepsilon>0$ 和 $[a,b]$ 的分划 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 取 s_i, $t_i<s_i<t_{i+1}$ $(s_0=a,\quad s_n=b)$, 使 $g(t)$ 在 s_i 连续并且

$$|g(t_i+)-g(s_i)|<\frac{\varepsilon}{2n},$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})|\leqslant&\sum_{i=1}^{n}(|g(t_i+)-g(s_i)|\\&+|g(s_i)-g(s_{i-1})|+|g(s_{i-1})-g(t_{i-1}+)|)\\\leqslant&n\frac{\varepsilon}{2n}+\sum_{i=1}^{n}|g(s_i)-g(s_{i-1})|+n\frac{\varepsilon}{2n}\\\leqslant&\mathop{V}_a^b(g)+\varepsilon.\end{aligned}$$

ε 是任意的, 故 $\mathop{V}_a^b(\alpha)\leqslant\mathop{V}_a^b(g)$.

设 $x\in C[a,b]$, 若 $t_i(i=0,1,\cdots,n)$ 是 $g(t)$ 的连续点, 则

$$\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})=g(t_i+)-g(t_{i-1}+)=g(t_i)-g(t_{i-1}),$$

于是由积分的存在性知

$$\begin{aligned}\int_a^b x\mathrm{d}\alpha&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x(t_i)(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1}))\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x(t_i)(g(t_i)-g(t_{i-1}))=\int_a^b x\mathrm{d}g.\end{aligned}$$

最后我们证明 α 是由 g 唯一决定的, 实际上若 $\beta\in V_0[a,b]$ 也使以上条件成立, 则 $\beta(a)=0=\alpha(a)$, 并且 $\forall t_0\in[a,b]$. 若 t_0 为 $\alpha(t)$ 及 $\beta(t)$ 的连续点, 从而也是 $\mathop{V}_a^t(\alpha)$ 与 $\mathop{V}_a^t(\beta)$ 的连续点. 取

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & t\in[a,t_0],\\ \text{线性}, & t\in\left(t_0,t_0+\dfrac{1}{n}\right),\\ 0, & t\in\left[t_0+\dfrac{1}{n},b\right].\end{cases}$$

则 $x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 从而

$$\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}\alpha=\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}g=\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}\beta,$$

于是 $\alpha(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}}x_n(t)\mathrm{d}\alpha=\beta(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}}x_n(t)\mathrm{d}\beta$, 并且

$$\begin{aligned}|\beta(t_0)-\alpha(t_0)|&\leqslant\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}}|x_n(t)|\,|\mathrm{d}\alpha|+\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}}|x_n(t)|\,|\mathrm{d}\beta|\\&\leqslant\overset{t_0+\frac{1}{n}}{\underset{t_0}{V}}(\alpha)+\overset{t_0+\frac{1}{n}}{\underset{t_0}{V}}(\beta)\to 0,\end{aligned}$$

从而得到 $\alpha(t_0)=\beta(t_0)$. 像 t_0 这样的点在 $[a,b]$ 上是稠密的, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 在 $[a,b]$ 上右连续, 故知 $\alpha(t)=\beta(t)$, $\forall t\in(a,b)$. 取 $x(t)\equiv 1$ 得到

$$\begin{aligned}\alpha(b)&=\alpha(b)-\alpha(a)=\int_a^b x\mathrm{d}\alpha=\int_a^b x\mathrm{d}\beta\\&=\beta(b)-\beta(a)=\beta(b).\end{aligned}$$

(3) 现在定义 $T:C[a,b]^*\to V_0[a,b],Tf=\alpha$. 由 (2),

$$\|Tf\|=\|\alpha\|\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)\leqslant\|f\|.$$

由 (1), $\|f\|\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha)=\|\alpha\|=\|Tf\|$, 即 $\|Tf\|=\|f\|$. 故 T 为一一的、到上的等距同构, 所以 $C[a,b]^*=V_0[a,b]$.

Riese 表现定理还可以推广到更广泛的连续函数空间 $C(\Omega)$ 上, 其中 Ω 是某个拓扑空间中的紧集. 这里不准备叙述它.

现将常用的几个共轭空间列表如下:

共轭空间	线性泛函的一般形式
$(\Phi^n)^*=\Phi^n$	$f(x)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$
$(l^p)^*=l^q$	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n$
$c_0^*=l^1$	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n$
$c^*=l^1$	$f(x)=\alpha\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nx_n$
$(L^p)^*=L^q$	$f(x)=\int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t$
$C[a,b]^*=V_0[a,b]$	$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}\alpha(t)$

这里 $1\leqslant p<\infty,p^{-1}+q^{-1}=1$.

3.2 w 收敛与 w^*收敛

现在我们引入一种新的收敛概念.

定义 3.2.1 设 X 是线性赋范空间, X^* 是 X 的共轭空间, $x_n, x \in X$. 若对于每个 $f \in X^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, 则称 x_n弱序列收敛于 x, 记为 $x_n \xrightarrow{w} x$ 或 $x = w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 我们简称之为 x_n w 收敛于 x.

以往所讲的依范数收敛, 有时又称为强收敛, 为了明确, 有时记为 $x_n \xrightarrow{s} x$.

定理 3.2.1 w收敛序列的极限是唯一的.

证明 设 $x_n \in X$, $x_n \xrightarrow{w} x$, $x_n \xrightarrow{w} y$, 则 $\forall f \in X^*$,

$$f(x_n) \to f(x), \qquad f(x_n) \to f(y).$$

于是 $f(x) = f(y)$, 由 Hahn-Banach 延拓定理知道 $x = y$.

定理 3.2.2 若 $x_n \xrightarrow{s} x$, 则 $x_n \xrightarrow{w} x$.

证明 $\forall f \in X^*$,

$$|f(x_n) - f(x)| \leqslant \|f\| \, \|x_n - x\|.$$

若 $\|x_n - x\| \to 0$, 则 $f(x_n) \to f(x)$, 故得之.

例 3.2.1 w收敛的序列不必是强收敛的.

设 $e_n \in l^p (p > 1)$, $e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{n}, 0, \cdots)$, $\forall f \in (l^p)^* = l^q$, 不妨设 $f = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$, 其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q < \infty$, 于是 $\eta_n \to 0$. 此时 $f(e_n) = \eta_n \to 0$, 故 $e_n \xrightarrow{w} 0$. 但 $\|e_n\|_p = 1 \not\to 0$, 即 $e_n \not\to 0$.

定理 3.2.3 设 X 是线性赋范空间, $x_n, x, y_n, y \in X, \lambda_n, \lambda \in \Phi$. 若 $x_n \xrightarrow{w} x$, $y_n \xrightarrow{w} y$, $\lambda_n \to \lambda$, 则

$$x_n + y_n \xrightarrow{w} x + y, \qquad \lambda_n x_n \xrightarrow{w} \lambda x. \tag{3.2.1}$$

证明 $\forall f \in X^*$, 直接计算得到

$$f(x_n + y_n) = f(x_n) + f(y_n) \to f(x) + f(y) = f(x + y),$$

$$f(\lambda_n x_n) = \lambda_n f(x_n) \to \lambda f(x) = f(\lambda x),$$

即是所要的结论.

定理 3.2.4 在有限维空间中, 强收敛和弱收敛是一致的.

证明　只须证明任一弱收敛序列是强收敛的, 为此只须证明弱收敛序列是按坐标收敛的. 实际上, 若 $x^{(k)}$, $x^{(0)} \in \Phi^n$, $x^{(k)} \xrightarrow{w} x^{(0)}$. 由于 $(\Phi^n)^* = \Phi^n$, 取线性泛函 $f_i(i = 1, \cdots, n)$, $f_i(x) = x_i$, 则 $f_i \in (\Phi^n)^*$,

$$f_i(x^{(k)}) = x_i^{(k)}, \qquad f_i(x^{(0)}) = x_i^{(0)}.$$

由于 $f_i(x^{(k)}) \to f_i(x^{(0)})$ 即是 $x_i^{(k)} \to x_i^{(0)} (k \to \infty)(i = 1, \cdots, n)$, 故 $x^{(k)}$ 依坐标收敛于 $x^{(0)}$, 由此知道 $x^{(k)}$ 依范数收敛于 $x^{(0)}$.

虽然一般地由弱收敛不能得出强收敛, 但下面关系是值得重视的.

定理 3.2.5　若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 则存在 $\{x_n\}$ 中元素的凸组合构成的序列 $\{y_n\}$ $\left(\text{即 } y_n = \sum_{i=1}^{k_n} r_{n_i} x_{n_i},\ r_{n_i} \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k_n} r_{n_i} = 1\right)$, $y_n \xrightarrow{s} x_0$.

证明　考虑集合 $E = \text{co}\{x_n\}$, 只须证明 $x_0 \in \overline{E}$.

若不然, 由凸集的隔离定理, 对于紧集 $\{x_0\}$ 和闭凸集 $\overline{E}$, 存在 $f \in X^*$ 和 r_1, r_2, $r_1 < r_2$ 使得

$$\text{Re} f(x_0) \leqslant r_1 < r_2 \leqslant \text{Re} f(y), \qquad \forall y \in \overline{E}.$$

特别地, 取 $y = x_n$, 则

$$\text{Re} f(x_0) \leqslant r_1 < r_2 \leqslant \text{Re} f(x_n), \qquad n \geqslant 1.$$

这与 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 矛盾.

为了进一步考察弱收敛和强收敛的关系, 我们引进自然嵌入算子.

定理 3.2.6　对于每个 $x \in X$, 在 X^* 上定义泛函 x^{**},

$$x^{**}(f) = f(x), \qquad \forall f \in X^*, \tag{3.2.2}$$

则 $x^{**} \in X^{**}$ 并且 $\|x^{**}\| = \|x\|$.

证明　由定义, $\forall f_1, f_2 \in X^*$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

$$\begin{aligned} x^{**}(\alpha f_1 + \beta f_2) &= (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) \\ &= \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha x^{**}(f_1) + \beta x^{**}(f_2), \end{aligned}$$

故 x^{**} 是线性泛函. 由于

$$|x^{**}(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\| \ \|f\|,$$

所以 $\|x^{**}\| \leqslant \|x\|$.

若 $x \neq 0$, 由 Hahn-Banach 延拓定理, 存在 $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ 并且 $f(x) = \|x\|$, 从而

$$\|x^{**}\| \geqslant |x^{**}(f)| = |f(x)| = \|x\|.$$

故 $\|x^{**}\| = \|x\|$. 当 $x = 0$ 时, 取 $x^{**} = 0$.

定义 3.2.2 称算子 $J : X \to X^{**}$, $Jx = x^{**}$,

$$x^{**}(f) = f(x), \qquad \forall f \in X^*$$

是从 X 到 X^{**} 的自然嵌入算子.

定理 3.2.7 自然嵌入算子是从 X 到 X^{**} 的子空间上的等距同构.

证明 若 $Jx_1 = x_1^{**}, Jx_2 = x_2^{**}$, 则

$$x_1^{**}(f) = f(x_1), \qquad x_2^{**}(f) = f(x_2), \quad \forall f \in X^*.$$

由定义知道

$$\begin{aligned}(\alpha x_1^{**} + \beta x_2^{**})(f) =& \alpha x_1^{**}(f) + \beta x_2^{**}(f) \\ =& \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \\ =& f(\alpha x_1 + \beta x_2),\end{aligned}$$

即

$$J(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha x_1^{**} + \beta x_2^{**} = \alpha J x_1 + \beta J x_2,$$

J 是线性的. 由定理 3.2.6 知道 $\|Jx\| = \|x^{**}\| = \|x\|$. 设 $Y = \{Jx : x \in X\}$, 则 $Y \subset X^{**}$ 是线性子空间. J 是从 X 到 Y 上的等距同构.

将等距同构的空间看作同一空间, 则 X 是 X^{**} 的线性子空间, $X \subset X^{**}$. 容易知道, 当 X 是Banach 空间时, X 是 X^{**} 的闭线性子空间. 若 X 不是完备的, 考虑 X^{**} 的闭子空间 $\overline{J(X)}$, 一方面 $\overline{J(X)}$ 是Banach 空间, 另一方面 X(即 $J(X)$) 在 $\overline{J(X)}$ 中稠密, 故 $\overline{J(X)}$ 是 X 的完备化空间. 这样, 借助于二次共轭空间我们得到了线性赋范空间的一种完备化方法.

定义 3.2.3 设 X 是线性赋范空间, X^* 是 X 的共轭空间. 称集合 $E \subset X$ 是 w 有界集, 若 $\forall f \in X^*$, 存在 $M_f > 0$,

$$|f(x)| \leqslant M_f, \qquad \forall x \in E.$$

定理 3.2.8 集合 $E \subset X$ 是 w 有界集当且仅当 E 是(范数) 有界集.

证明　若 E 有界, 即存在 $M>0$, $\|x\| \leqslant M, \forall x \in E$. 此时 $\forall f \in X^*$,

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\ \|x\| \leqslant M\|f\| = M_f, \qquad \forall x \in E,$$

所以 E w 有界.

反之, 若 E w 有界, J 是自然嵌入算子, 则 $J(E)$ 是 X^{**} 的子集. $\forall f \in X^*$,

$$|x^{**}(f)| = |f(x)| \leqslant M_f, \qquad \forall x^{**} \in J(E),$$

这说明 $J(E)$ 在 X^* 上点点有界. 根据共鸣定理(注意 X^* 是Banach 空间), 存在 $M>0, \|x^{**}\| \leqslant M, \forall x^{**} \in J(E)$. 但 $\|Jx\| = \|x^{**}\| = \|x\|$, 故 $\|x\| \leqslant M$, $\forall x \in E$. E 是有界集.

定理 3.2.9　$x_n \xrightarrow{w} x$ 当且仅当

(1) $\{\|x_n\|\}$ 有界;

(2) $\exists G \subset X^*$, $\mathrm{span}G$ 在 X^* 中稠密并且 $\forall f \in G$,

$$f(x_n) \to f(x).$$

证明　若 $x_n \xrightarrow{w} x$, 显然 $\{x_n\}$ 是 w 有界集. 由定理 3.2.8, $\{\|x_n\|\}$ 有界, 后半部分结论自然成立, 必要性得证.

反之, 设 $\|x_n\| \leqslant M(\forall n \geqslant 1)$, 不妨也设 $\|x\| \leqslant M$. 当 $f(x_n) \to f(x)$ 对于 G 的所有 f 成立时, 由于极限运算的线性, 对于 $\mathrm{span}G$ 中的每个 f 仍然成立. 现在 $\forall f \in X^*$ 和 $\varepsilon > 0$, 取 $f' \in \mathrm{span}G$, $\|f - f'\| < \varepsilon$, 关于 f', 存在 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时,

$$|f'(x_n) - f'(x)| < \varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}
|f(x_n) - f(x)| &\leqslant |f(x_n) - f'(x_n)| + |f'(x_n) - f'(x)| \\
&\quad + |f'(x) - f(x)| \\
&\leqslant \|f - f'\|\ \|x_n\| + \varepsilon + \|f' - f\|\ \|x\| \\
&< \varepsilon M + \varepsilon + \varepsilon M = (2M+1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

故 $x_n \xrightarrow{w} x$.

例 3.2.2　$l^p(1<p<\infty)$ 中的序列 $x^{(n)} = (x_i^{(n)})$$w$收敛于 $x^{(0)} = (x_i^{(0)})$ 的充要条件是 $\{\|x^{(n)}\|_p\}$ 有界, 并且 $\forall i = 1, 2, \cdots$, $x_i^{(n)} \to x_i^{(0)} (n \to \infty)$.

实际上, 由 $(l^p)^* = l^q$, 设 $f_i = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{i}, 0, \cdots)$, $G = \{f_i : i \geqslant 1\}$, 则 $f_i \in l^q$, 并且对于每个 i,

$$f_i(x^{(n)}) = x_i^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

$$f_i(x^{(0)}) = x_i^{(0)}.$$

最后, span$G$ 在 l^q 中是稠密的, 对照定理 3.2.9 即得出所要的结论.

例 3.2.3 $L^p[a,b](1 < p < \infty)$ 中的序列 x_n 弱收敛于 x_0 的充要条件是 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\|_p < \infty$, 并且 $\forall t_0 \in [a,b]$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{t_0} x_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^{t_0} x_0(t)\mathrm{d}t. \tag{3.2.3}$$

设 $G = \{\chi_{[a,t]} : t \in [a,b]\}$, 其中 $\chi_{[a,t]}$ 是区间 $[a,t]$ 的特征函数. 显然 $\chi_{[a,t]} \in L^q[a,b]$, 并且由 Lebsegue 积分理论, span$G$ 在 $L^q[a,b]$ 中稠密. 现在记与 $\chi_{[a,t_0]}$ 相应的泛函为 f_{t_0}, 则

$$f_{t_0}(x_0) = \int_a^b \chi_{[a,t_0]} x_0(t)\mathrm{d}t = \int_a^{t_0} x_0(t)\mathrm{d}t,$$

$$f_{t_0}(x_n) = \int_a^b \chi_{[a,t_0]} x_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^{t_0} x_n(t)\mathrm{d}t.$$

对照定理 3.2.9 即得出所要的结论.

例 3.2.4 $C[a,b]$ 中的序列 x_n 弱收敛于 x_0 的充要条件是 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\| < \infty$, 并且 $\forall t \in [a,b]$, $x_n(t) \to x_0(t)$.

实际上, $\forall t \in [a,b]$, 定义 $f_t(x) = x(t)$, 则 f_t 是 $C[a,b]$ 上的线性泛函, 并且 $|f_t(x)| = |x(t)| \leqslant \|x\|$, 故 $\|f_t\| \leqslant 1$, $f_t \in C[a,b]^*$.

若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 必有 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\| < \infty$, 并且 $f_t(x_n) \to f_t(x_0)$, 即 $x_n(t) \to x_0(t)$.

反之, 对于每个 $f \in C[a,b]^*$, 存在 $\alpha(t) \in V_0[a,b]$, 使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}\alpha(t), \qquad \forall x(t) \in C[a,b].$$

若定理中所说的条件成立, 即 $\|x_n\| \leqslant M$, 并且 $x_n(t) \to x_0(t)$, $\forall t \in [a,b]$. 由 Stieltjes-Lebesgue 控制收敛定理得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\mathrm{d}\alpha(t) = \int_a^b x_0(t)\mathrm{d}\alpha(t),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. f 是任意的, 故 $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

引理 3.2.1　设 X 是线性赋范空间, 则下列条件等价:

(1) X 可分.

(2) X 的闭 (或开) 单位球 $S(X)$ 可分.

(3) X 的单位球面 $S_p(X)$ 可分.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 若可数集 A 在 X 中稠密, 则 $A\cap S(X)$ 是 $S(X)$ 中的可数稠密集.

(2) $\Rightarrow$ (3). 若 A 是 $S(X)$ 中的可数稠密集, $\forall x\in A, x\neq 0$, 令 $x'=\dfrac{x}{\|x\|}$, 则 $A'=\{x' : x\in A\}$ 是 $S_p(X)$ 中的可数稠密集. 实际上, $\forall x\in S_p(X)$, 若 $\|x_n - x\|\to 0$, 则 $\|x_n\|\to\|x\|=1$, 故

$$\begin{aligned}\|x_n' - x\| &= \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - x\right\| \leqslant \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x}{\|x_n\|}\right\| + \left\|\frac{x}{\|x_n\|} - x\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{\|x_n\|}\|x_n - x\| + \|x\|\left|\frac{1}{\|x_n\|} - 1\right| \to 0.\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $x_1, x_2, \cdots$ 是 $S_p(X)$ 中的可数稠密集, 记 $B=\{rx_n : r\in\mathbf{Q},\ n\geqslant 1\}$, 其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数全体. 则 B 是 X 中的可数稠密集. $\forall x\in X, x\neq 0$, 则 $x'=\dfrac{x}{\|x\|}\in S_p(X)$, 当 $x_n\in S_p(X)$, $x_n\to x'$ 时. 取 $r_n\to\|x\|$, 则 $r_nx_n\in B$, $r_nx_n\to x$. 故 B 在 X 中稠密.

定理 3.2.10　若 X^* 是可分的, X 必是可分的.

证明　现在设 $S_p(X^*)$ 是 X^* 的单位球面, $f_1, f_2, \cdots$ 是 $S_p(X^*)$ 中的可数稠密子集. 由于 $\|f_n\| = \sup\limits_{\|x\|=1}|f_n(x)| = 1$, 可取 $x_n\in X$, $\|x_n\|=1$ 使得

$$|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}, \qquad n=1,2,\cdots.$$

记 $E=\mathrm{span}\{x_n\}$, 我们断定 $\overline{E}=X$, 从而 X 是可分的.

若不然, 有 $x_0\in X\backslash\overline{E}$, 则 $d(x_0,E)>0$, 根据 Hahn-Banach 定理, 存在 $f\in X^*$, $\|f\|=1$, $f(x_0)=d(x_0,E)$ 并且 $f(x)=0,\forall x\in E$. 于是 $f\in S_p(X^*)$. 但

$$\|f_n - f\| \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| = |f_n(x_n)| > \frac{1}{2}, \qquad n\geqslant 1,$$

这与 $\{f_n\}$ 在 $S_p(X^*)$ 中稠密矛盾.

例 3.2.5　定理 3.2.10 的逆不真.

我们已经知道 $(l^1)^* = l^\infty$, l^1 是可分的, 但 l^∞ 不是可分的.

定义 3.2.4 线性赋范空间 X 中的子集 A 称为是弱序列闭集, 若 $\forall x_n \in A$, $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 时, $x_0 \in A$. 称 A 是弱序列紧集, 若 A 中任一无穷序列有子序列弱收敛于 A 中元. 空间 X 称为是弱序列完备的, 若 X 中的每个弱Cauchy 序列 (即 $\forall f \in X^*$, $f(x_n)$ 是 Cauchy 数列) 都是弱收敛序列.

定理 3.2.11 设 X 是线性赋范空间, $A \subset X$ 是凸集, 则 A 是 (强) 闭集当且仅当 A 是弱序列闭集. 特别地, X 的线性子空间是闭的当且仅当它是弱序列闭的.

证明 设 A 是弱序列闭的. 此时 $\forall x_n \in A$, $x_n \to x_0$ 自然有 $x_n \xrightarrow{w} x_0$. 由弱序列闭性 $x_0 \in A$, 故 A 闭.

反之, 若 A 闭, $x_n \in A$, $x_n \xrightarrow{w} x_0 \in X$. 由定理 3.2.5, 存在 $\{x_n\}$ 的凸组合的序列 $\{y_n\}$, $y_n \to x_0$. 但 A 是凸集, 所以 $y_n \in A$. A 闭, 所以 $x_0 \in A$. $\{x_n\}$ 是 A 中任一弱收敛序列, 所以 A弱序列闭.

定理 3.2.12 线性赋范空间中的每个弱序列紧集是弱序列闭的.

证明 设 A 是弱序列紧的, $x_n \in A$, $x_n \xrightarrow{w} x_0$. 则存在子列 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0' \in A$. 由弱序列极限的唯一性 $x_0 = x_0' \in A$.

定理 3.2.13 设 X 是线性赋范空间, $E \subset X$ 是弱序列紧集, $x_0 \in X \backslash E$, 则存在 $y_0 \in E$ 使得

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in E} \|x_0 - y\| = d(x_0, E),$$

即 y_0 是 x_0 关于 E 的最佳逼近元.

证明 取 $y_n \in E$, 使得 $\|x_0 - y_n\| \to d(x_0, E)$. 由于 E 是弱序列紧的, 从而有子列 $y_{n_k} \xrightarrow{w} y_0 \in E$. 现在一方面

$$\|x_0 - y_0\| \geqslant d(x_0, E).$$

另一方面由于 $\forall f \in X^*$, $f(y_{n_k}) \to f(y_0)$, 特别地取 $f_0 \in X^*$, 使得 $\|f_0\| = 1$, $f_0(x_0 - y_0) = \|x_0 - y_0\|$, 则

$$\begin{aligned}\|x_0 - y_0\| &= f_0(x_0 - y_0) = \lim_{n_k \to \infty} f_0(x_0 - y_{n_k}) \\ &\leqslant \lim_{n_k \to \infty} \|f_0\|\,\|x_0 - y_{n_k}\| = d(x_0, E).\end{aligned}$$

于是 $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, E)$.

线性赋范空间上的实泛函 $\varphi : X \to \mathbf{R}$(不必线性) 称为是弱 (序列)下半连续的, 若对于任何 $x_n \xrightarrow{w} x$, $\varphi(x) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \varphi(x_n)$.

定理 3.2.14　设 E 是线性赋范空间中的弱紧集, $\varphi : E \to \mathbf{R}$ 是弱下半连续实泛函, 则 φ 在 E 上可达到极小值, 即 $\exists x_0 \in E$, 使得

$$\varphi(x_0) = \inf_{x \in E} \varphi(x). \tag{3.2.4}$$

证明　首先证明 φ 在 E 上是有下界的. 若不然, $\forall n \geqslant 1$, $\exists x_n \in E$, $\varphi(x_n) < -n$. E弱紧, 不妨设 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0 \in E$. 由 φ 的弱下半连续性, $\varphi(x_0) \leqslant \varliminf_{n_k \to \infty} \varphi(x_{n_k}) = -\infty$, 这与 φ 的定义矛盾.

其次, 取 $x_n' \in E$, 使得 $\varphi(x_n') \to \inf_{x \in E} \varphi(x)$, 则有子序列 $x_{n_k}' \xrightarrow{w} x_0' \in E$. 由下半连续性得

$$\varphi(x_0') \leqslant \varliminf_{n_k \to \infty} \varphi(x_{n_k}') = \inf_{x \in E} \varphi(x).$$

另一方面, 显然 $\varphi(x_0') \geqslant \inf_{x \in E} \varphi(x)$, 最后等号成立.

定义 3.2.5　设 X 是线性赋范空间, X^* 是 X 的共轭空间, $f_n, f \in X^*$. 若 $\forall x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$, 则称 f_n w^* 序列收敛于 f, 记为 $f_n \xrightarrow{w^*} f$, 或 $f = w^* - \lim_{n \to \infty} f_n$. 简称为 f_n w^*收敛于 f.

定理 3.2.15　w^*收敛序列的极限是唯一的.

证明　若 $f_n \xrightarrow{w^*} f$, $f_n \xrightarrow{w^*} f'$, $f \neq f'$, 则存在 $x \in X$, $f(x) \neq f'(x)$. 于是 $f_n(x) \to f(x)$, $f_n(x) \to f'(x)$, 这是不可能的.

定理 3.2.16　设 $f_n, f \in X^*$, $f_n \xrightarrow{w} f$, 则 $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

证明　若 $f_n \xrightarrow{w} f$, 则 $\forall x^{**} \in X^{**}$, $x^{**}(f_n) \to x^{**}(f)$. 但 $X \subset X^{**}$, $\forall x \in X$, 若 $Jx = x^{**}$, 则

$$f_n(x) = x^{**}(f_n) \to x^{**}(f) = f(x).$$

故 $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

例 3.2.6　w^* 收敛而 w 不收敛的泛函序列.

设 $e_n \in l^1$, $e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{n}, 0, \cdots)$, 由于 $c_0^* = l^1$, $\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in c_0$, $e_n(x) = x_n \to 0$, 故 $e_n \xrightarrow{w^*} 0$.

另一方面, $(l^1)^* = l^\infty$, 取 $x_0^{**} = (1, 1, \cdots) \in l^\infty$, 则 $x_0^{**}(e_n) = 1 \not\to 0$. 故 $e_n \overset{w}{\not\to} 0$.

定理 3.2.17　设 X 是Banach 空间, X^* 是 X 的共轭空间, $f_n, f \in X^*$, 则 $f_n \xrightarrow{w^*} f$ 当且仅当

(1) $\sup_{n \geqslant 1} \|f_n\| < \infty$;

(2) $\exists E\subset X$, span$E$ 在 X 中稠密, 使得 $\forall x\in E$,

$$f_n(x)\to f(x).$$

证明与定理 3.2.9 类似, 此处略.

定理 3.2.18 设 X 是可分线性赋范空间, 则 X^* 中的任一有界序列 $\{f_n\}$ 存在子序列 $\{f_{n_k}\}$, $f_{n_k}\xrightarrow{w^*}f\in X^*$. 特别地, 共轭空间 X^* 的闭单位球是 w^* 序列紧的.

证明 设 $\|f_n\|\leqslant M$, $\{x_n\}$ 在 X 中稠密. 由 $|f_n(x_1)|\leqslant M\|x_1\|$, 取子序列 $f_{1i}(i\geqslant 1)$ 使数列 $f_{1i}(x_1)$收敛. 又由 $|f_{1i}(x_2)|\leqslant M\|x_2\|$, 取 f_{1i} 的子序列 $f_{2i}(i\geqslant 1)$ 使 $f_{2i}(x_2)$收敛.

依次做下去, 一般地有 $f_{ki}(i\geqslant 1)$, 使得 $f_{ki}(x_k)$收敛 $(i\to\infty)$.

取对角线上的一列函数 $f_{kk}(k\geqslant 1)$, 则 f_{kk} 在每一点 x_i收敛. 我们证明实际上 f_{kk} 在每一点 $x\in X$收敛.

由于 $\{x_i\}$ 在 X 中稠密, $\forall x\in X$ 和 $\varepsilon>0$, 存在 x_i 使得 $\|x-x_i\|<\varepsilon$. 以下简记 kk 为 k, rr 为 r, 此时

$$\begin{aligned}|f_k(x)-f_r(x)|\leqslant&|f_k(x)-f_k(x_i)|+|f_k(x_i)-f_r(x_i)|\\&+|f_r(x_i)-f_r(x)|\\\leqslant&\|f_k\|\|x-x_i\|+|f_k(x_i)-f_r(x_i)|\\&+\|f_r\|\|x_i-x\|.\end{aligned}$$

取 n_0 足够大, 使当 $k,r\geqslant n_0$ 时, $|f_k(x_i)-f_r(x_i)|<\varepsilon$, 则

$$|f_k(x)-f_r(x)|<\varepsilon M+\varepsilon+\varepsilon M=(2M+1)\varepsilon.$$

于是 f_k 在 X 上处处收敛.

现在设 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$, 则 f 是线性的并且

$$|f(x)|\leqslant\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|\leqslant M\|x\|,\quad\forall x\in X,$$

故 $f\in X^*$. 由 f 的定义即知 $f_k\xrightarrow{w^*}f$. 证毕.

由上述内容可以看出, 弱收敛的概念与强收敛既有联系又有区别. 记住它们的联系与区别在理论上和应用上是非常重要的. 当把它们应用于不同的研究对象时, 又会引出各种相同或不同的方法与结果. 例如, 应用于向量值函数 $f:\Omega\to X$ 时,

将会得到强连续与弱连续、强可导与弱可导、强解析与弱解析、强可积与弱可积等概念. 当然在很多情况下它们是不同的. 不过, 下面我们将要讨论的定义在复平面 $\mathbf{C}$ 的开集中的向量值函数的两种解析性却是等价的.

设 X 是复的线性赋范空间, Ω 是复平面中的开集, $u:\Omega\to X$ 是一函数. 称 u 在 Ω 中解析, 若 $\forall z_0\in\Omega$, $\exists\, r_{z_0}>0$, $a_n\in X$ 使得级数

$$u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad |z-z_0|<r_{z_0}$$

以 X 中的范数收敛. 称 u 在 Ω 中是弱解析的, 若上述级数弱收敛, 即 $\forall x^*\in X^*$,

$$x^*u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x^*(a_n)(z-z_0)^n,\qquad |z-z_0|<r_{z_0}$$

收敛.

由强解析性容易得到弱解析性. 下面定理保证了相反的关系也成立.

定理 3.2.19　设 X 是Banach 空间, 若 (形式) 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{3.2.5}$$

在 $|z-z_0|<r$ 中弱收敛, 则此级数在 $|z-z_0|<r$ 中以范数收敛.

证明　固定 z, $|z-z_0|<r$, 取 z_1 使得 $|z-z_0|<|z_1-z_0|<r$. 由幂级数在 z_1 的弱收敛性, $\forall x^*\in X^*$,

$$\lim_{n\to\infty}x^*(a_n)\,(z_1-z_0)^n=0,$$

故 $\{a_n\,(z_1-z_0)^n:n\geqslant 0\}$弱有界从而范数有界. 不妨设 $\|a_n\|\,|z_1-z_0|^n\leqslant M$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\|\,|z-z_0|^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\|\,|z_1-z_0|^n\left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n\\&\leqslant M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n<\infty.\end{aligned}$$

X 完备, 故 (3.2.5) 以范数收敛. 证毕.

3.3　共轭算子与紧算子

类似于线性赋范空间有共轭空间, 有界线性算子则有共轭算子. 让我们先给出定义.

定义 3.3.1 设 X, Y 是线性赋范空间, X^*, Y^* 分别是 X 与 Y 的共轭空间, $T \in B(X,Y)$. 若线性算子 $T^*: Y^* \to X^*$ 满足

$$(T^*y^*)(x) = y^*(Tx), \qquad \forall x \in X, y^* \in Y^*,$$

则称 T^* 是 T 的共轭算子.

有时我们记 $f(x) = (x, f)$, 则上式可以写成

$$(Tx, y^*) = (x, T^*y^*). \tag{3.3.1}$$

仅仅从定义上来看, T^* 的存在性似乎是很值得怀疑的. 但下面定理告诉我们 T^* 不仅存在而且它的出现是很自然的.

定理 3.3.1 设 X, Y 是线性赋范空间, $T \in B(X,Y)$, 则

(1) T^* 存在并且唯一,

(2) $\|T^*\| = \|T\|$,

(3) 映射$\sigma(T) = T^*$ 是线性的并且是从 $B(X,Y)$ 到 $B(Y^*, X^*)$ 的子空间上的等距同构.

证明 (1) $\forall y^* \in Y^*$, 记 $l(x) = (Tx, y^*)$, 容易知道 l 是 X 上的线性泛函并且

$$|l(x)| = |(Tx, y^*)| \leqslant \|y^*\| \|Tx\| \leqslant \|y^*\| \|T\| \|x\|, \qquad \forall x \in X,$$

所以

$$\|l\| \leqslant \|y^*\| \|T\|. \tag{3.3.2}$$

这说明 $l \in X^*$. 显然 l 与 y^* 有关, 记为 T^*y^*, 则 T^* 是 $Y^* \to X^*$ 的算子. 由定义知道

$$(x, T^*y^*) = l(x) = (Tx, y^*), \quad \forall x \in X, \quad y^* \in Y^*.$$

直接验证可知 T^* 是线性算子. 由定义, T^* 是 T 的共轭算子.

若 T_1^* 也是 T 的共轭算子, 则 $\forall x \in X$, $y^* \in Y^*$,

$$(x, T^*y^*) = (Tx, y^*) = (x, T_1^*y^*).$$

由 x 的任意性知道 $T^*y^* = T_1^*y^*$, 由 y^* 的任意性知 $T^* = T_1^*$.

(2) 由 (3.3.2), $\forall y^* \in Y^*$,

$$\|T^*y^*\| = \|l\| \leqslant \|y^*\| \|T\|,$$

故 $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

另一方面由定义中的等式,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|y^*\|\leqslant 1} |(Tx, y^*)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|y^*\|\leqslant 1} |(x, T^*y^*)|$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \|x\| \|T^*y^*\| \leqslant \sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \|T^*y^*\| = \|T^*\|.$$

总之, $\|T^*\| = \|T\|$.

(3) 由 (2) 已经知道 $\|\sigma(T)\| = \|T^*\| = \|T\|$, 剩下只需证明 σ 是线性映射. 实际上若 $\sigma(T_1) = T_1^*$, $\sigma(T_2) = T_2^*$, 则 $\forall x \in X$, $y^* \in Y^*$, $\alpha, \beta \in \varPhi$,

$$\begin{aligned}((\alpha T_1 + \beta T_2)x, y^*) &= (\alpha T_1 x, y^*) + (\beta T_2 x, y^*) \\ &= \alpha(T_1 x, y^*) + \beta(T_2 x, y^*) \\ &= \alpha(x, T_1^* y^*) + \beta(x, T_2^* y^*) \\ &= (x, (\alpha T_1^* + \beta T_2^*)y^*).\end{aligned}$$

由定义 $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \beta T_2^*$ 或

$$\sigma(\alpha T_1 + \beta T_2) = \alpha\sigma(T_1) + \beta\sigma(T_2).$$

例 3.3.1 设 $T : \varPhi^n \to \varPhi^m$ 是有界线性算子, $e_1, \cdots, e_n$ 是 $\varPhi^n$ 的一组基. 令 $Y_k = \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_{k-1}, e_{k+1}, \cdots, e_n\}$, 则 Y_k 是闭子空间, $e_k \overline{\in} Y_k$. 由 Hahn-Banach 延拓定理, 存在 $e_k^* \in (\varPhi^n)^*, e_k^*(e_k) = d(e_k, Y_k) \neq 0$. 必要时乘上一个不为 0 的常数, 可设 $e_k^*(e_k) = 1$, 对于其余的 $e_i, e_k^*(e_i) = 0$, 即 $e_1^*, \cdots, e_n^*$ 满足

$$e_k^*(e_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

称 $e_1^*, \cdots, e_n^*$ 是 $e_1, \cdots, e_n$ 的对偶基.

类似地, 若 $\mu_1, \cdots, \mu_m$ 是 $\varPhi^m$ 的一组基, 则存在 $\mu_1^*, \cdots, \mu_m^* \in (\varPhi^m)^*$ 是 $\mu_1, \cdots, \mu_m$ 的对偶基.

现在设 T 在基底 $e_1, \cdots, e_n$ 与 $\mu_1, \cdots, \mu_m$ 之下相应的矩阵为 (a_{ik}), 即

$$Te_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\mu_k \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

若 $T^* : (\varPhi^m)^* \to (\varPhi^n)^*$ 是 T 的共轭算子, 与 T^* 对应的矩阵是 (b_{jk}), 即

$$T^*\mu_j^* = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}e_k^* \qquad (j = 1, \cdots, m),$$

则根据共轭算子的定义, 应有

$$(e_i, T^*\mu_j^*) = (Te_i, \mu_j^*) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m).$$

实际计算可知

$$(e_i, T^*\mu_j^*) = \left(e_i, \sum_{k=1}^{n} b_{jk} e_k^*\right) = b_{ji},$$

$$(Te_i, \mu_j^*) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\mu_k, \mu_j^*\right) = a_{ij}.$$

所以 $b_{ji} = a_{ij}$.

这说明 (b_{ij}) 是 (a_{ij}) 的转置矩阵. 换句话说, 从有限维空间到有限维空间的线性算子, 其共轭算子相应的矩阵是原算子相应矩阵的转置矩阵. 这和线性代数中的结论是一样的.

定理 3.3.2 (1) 若 X, Y, Z 是线性赋范空间, $A \in B(Y, Z), B \in B(X, Y)$, 则 $(AB)^* = B^*A^*$.

(2) 设 I_X 与 I_{X^*} 分别是 X 与 X^* 中的单位算子, 则 $(I_X)^* = I_{X^*}$.

证明 (1) 容易知道, $AB \in B(X, Z)$, 故 $(AB)^*$ 存在. 又 $\forall x \in X, z^* \in Z^*$,

$$(x, (AB)^*z^*) = (ABx, z^*) = (Bx, A^*z^*) = (x, B^*A^*z^*),$$

所以 $(AB)^* = B^*A^*$.

(2) $\forall x \in X, x^* \in X^*$,

$$(x, (I_X)^*x^*) = (I_X x, x^*) = (x, x^*) = (x, I_{X^*}x^*),$$

故 $(I_X)^* = I_{X^*}$.

若 $T^* : Y^* \to X^*$ 是 $T : X \to Y$ 的共轭算子, 记 $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ 是 T^* 的共轭算子.

定理 3.3.3 设 X, Y 是线性赋范空间, $A \in B(X, Y)$, 则 $\|A^{**}\| = \|A\|$. A^{**} 是 A 的保持范数不变的线性延拓.

证明 由定理 3.3.1 知道 $\|A^{**}\| = \|A^*\| = \|A\|$.

比较 $A : X \to Y$ 与 $A^{**} : X^{**} \to Y^{**}$, 由 $X \subset X^{**}$ 知道 $D(A) \subset D(A^{**})$. 对于 $x \in X$, 仍用 x 代表 $x^{**}(= Jx) \in X^{**}$, 若 $y^* \in Y^*$, 则

$$\begin{aligned}(y^*, A^{**}x) &= (y^*, A^{**}x^{**}) = (A^*y^*, x^{**}) \\ &= (A^*y^*, x) = (y^*, Ax).\end{aligned}$$

y^* 是任意的, 故 $A^{**}x = Ax$. 于是 A^{**} 是 A 的保范延拓.

下面让我们考虑一类重要的算子 —— 紧算子, 它在积分方程理论及数学物理中具有广泛的应用.

定义 3.3.2 设 X, Y 是线性赋范空间, $T : X \to Y$ 是线性算子.

(1) 称 T 是紧的, 若 T 将 X 中的每个有界集映射为 Y 中的相对紧集.

(2) 称 T 是有限秩算子, 若 $\dim T(X) < \infty$.

显然, T 是紧算子当且仅当 T 把单位球映射为 Y 中的相对紧集.

命题 3.3.1 (1) 紧算子是有界算子.

(2) 有界的有限秩算子是紧的.

(3) 任何从有限维空间到有限维空间的线性算子是紧的.

(4) 设 X, Y, Z 是线性赋范空间, $A \in B(Y, Z), B \in B(X, Y)$. 若 A, B 中有一个是紧的, 则 AB 是紧算子.

证明 相对紧集是有界集, 故得 (1). 对于 X 中的任一有界集 $E, T(E)$ 是有界集, 当 $T(E)$ 是有限维空间的子集时, $T(E)$ 相对紧, 故 (2) 成立. (3) 是明显的.

设 $S(X)$ 是 X 的单位球. 若 A 是紧的, 首先 $B(S(X))$ 是 Y 中的有界集, 然后 $AB(S(X))$ 是 Z 中的相对紧集, 于是 AB 是紧的. 若 B 是紧算子, 首先 $B(S(X))$ 是 Y 中的相对紧集, 由于 A 连续, A 将 $B(S(X))$ 中的收敛序列映射为 $AB(S(X))$ 中的收敛序列, 故 AB 是紧的. 于是 (4) 成立.

从 X 到 Y 中的紧算子全体记为 $C(X, Y)$.

定理 3.3.4 (1) $C(X, Y)$ 是 $B(X, Y)$ 的线性子空间.

(2) 若 Y 是Banach 空间, 则 $C(X, Y)$ 是 $B(X, Y)$ 的闭子空间, 从而也是Banach 空间.

证明 (1) 设 $S(X)$ 是 X 的单位球, $T_1(S(X))$ 是 Y 中的相对紧集, 对于其中任一无穷序列 $T_1x_n (x_n \in S(X))$, 有子序列 $T_1x_{n_k} \to y_1 \in Y$. 又 $T_2(S(X))$ 是 Y 中的相对紧集, 对于 $T_2(x_{n_k})$, 有子序列 $T_2x_{n_{k'}} \to y_2 \in Y$, 从而 $(T_1 + T_2)x_{n_{k'}} \to y_1 + y_2$. 故 $(T_1 + T_2)(S(X))$ 是相对紧的, $T_1 + T_2 \in C(X, Y)$.

至于 $\alpha T_1 \in C(X, Y)$ 可类似证之.

(2) 设 $\|T_n - T\| \to 0$, $T_n \in C(X, Y)$, 往证 $T \in C(X, Y)$. 首先此时 $B(X, Y)$ 是完备的, 故 $T \in B(X, Y)$. 其次 $\forall \varepsilon > 0$, 取 n_0, 使得 $n \geqslant n_0$ 时, $\|T_n - T\| < \varepsilon$. $T_n(S(X))$ 是相对紧集, 从而是完全有界集. 设 $y_1, \cdots, y_k$ 是 $T_n(S(X))$ 的 ε 网, 则有 $x_1, \cdots, x_k \in S(X)$, $y_i = T_nx_i \ (i = 1, \cdots, k)$. 我们证明 $Tx_1, \cdots, Tx_k$ 是 $T(S(X))$ 的 3ε 网. ε 是任意的, 从而 $T(S(X))$ 是完全有界集.

实际上, $\forall x \in S(X)$, 取 y_i 使得

$$\|T_n x - y_i\| = \|T_n x - T_n x_i\| < \varepsilon.$$

则

$$\begin{aligned}\|Tx_i - Tx\| &\leqslant \|Tx_i - T_n x_i\| + \|T_n x_i - T_n x\| + \|T_n x - Tx\| \\ &\leqslant \|T - T_n\|\,\|x_i\| + \varepsilon + \|T_n - T\|\,\|x\| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Y 是完备的, $T(S(X))$ 是相对紧集, 即 $T \in C(X,Y)$. $C(X,Y)$ 是闭子空间.

由于 $B(X,Y)$ 是Banach 空间, 所以 $C(X,Y)$ 是Banach 空间.

定理 3.3.5 设 X, Y 是线性赋范空间, 若 $T \in C(X,Y)$, 则 $T^* \in C(Y^*, X^*)$.

证明 设 $S(X)$ 是 X 的单位球, $S(Y^*)$ 是 Y^* 的单位球, T 是紧算子, 我们要证明 $T^*(S(Y^*))$ 是 X^* 中的相对紧集. 由于 X^* 是Banach 空间, 只需证明 $T^*(S(Y^*))$ 是完全有界集.

$\forall \varepsilon > 0$, $T(S(X))$ 完全有界, 故存在 $x_1, \cdots, x_n \in S(X)$, $y_i = Tx_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ 是 $T(S(X))$ 的 ε 网, 即 $\forall x \in S(X)$, $\exists x_k$ 使得

$$\|Tx - y_k\| = \|Tx - Tx_k\| < \varepsilon. \tag{3.3.3}$$

记 $\sigma : Y^* \to \Phi^n, \sigma(y^*) = (y^*(y_1), \cdots, y^*(y_n))(\forall y^* \in Y^*)$. 则 σ 是有界的有限秩算子, 从而是紧算子, $\sigma(S(Y^*))$ 完全有界. 不妨设 $\sigma(y_1^*), \cdots, \sigma(y_m^*)$ 是 $\sigma(S(Y^*))$ 的 ε 网, 其中 $y_j^* \in S(Y^*)$, $j = 1, \cdots, m$. 于是 $\forall y^* \in S(Y^*)$, 存在 y_j^* 使得

$$\|\sigma(y^*) - \sigma(y_j^*)\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |y^*(y_k) - y_j^*(y_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

特别地

$$\left|y^*(y_k) - y_j^*(y_k)\right| < \varepsilon \qquad (k = 1, \cdots, n). \tag{3.3.4}$$

于是当 $y^* \in S(Y^*)$ 时, 由 (3.3.3), (3.3.4),

$$\begin{aligned}\left|y^*(Tx) - y_j^*(Tx)\right| &\leqslant |y^*(Tx) - y^*(y_k)| \\ &\quad + \left|y^*(y_k) - y_j^*(y_k)\right| + \left|y_j^*(y_k) - y_j^*(Tx)\right| \\ &\leqslant \|Tx - y_k\| + \varepsilon + \|y_k - Tx\| < 3\varepsilon,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\|T^*y^* - T^*y_j^*\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|(T^*y^* - T^*y_j^*, x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|(y^* - y_j^*, Tx)\| \leqslant 3\varepsilon < 4\varepsilon.\end{aligned}$$

$T^*(S(Y^*))$ 是完全有界集, T^* 是紧算子.

定理 3.3.6　设 $T: X \to Y$ 是紧算子, 则 $\forall x_n \in X, x_n \xrightarrow{w} x$ 时, $Tx_n \to Tx$.

证明　为简单起见, 设有 $x_n \xrightarrow{w} 0$ 但 Tx_n 不 (依范数)收敛于 0. 此时存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和子序列 x_{n_k}, $\|Tx_{n_k}\| \geqslant \varepsilon_0$. 但序列 $\{x_n\}$ 有界, $\{x_{n_k}\}$ 也有界, 从而 $\{Tx_{n_k}\}$ 是相对紧集. 不妨设其子序列 $Tx_{n_{k'}} \to y_0 \in Y$. 由于 $x_{n_{k'}} \xrightarrow{w} 0$, $\forall y^* \in Y^*$,

$$y^*(y_0) = \lim_{k\to\infty} y^*(Tx_{n_{k'}}) = \lim_{k\to\infty} (x_{n_{k'}}, T^*y^*) = 0,$$

所以 $y_0 = 0$. 这说明 $Tx_{n_{k'}} \to 0$, 与 $\|Tx_{n_k}\| \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾.

在积分方程理论中遇到的很多算子是紧算子. 它们是泛函分析早期研究的算子类型之一.

例 3.3.2　考察第一型 Fredholm 积分算子 $T: C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in C[a,b],$$

其中 $K(s,t)$ 是 $a \leqslant t, s \leqslant b$ 上的连续函数.

在 2.1 节已经知道, T 是有界线性算子, 现在证明 T 还是紧算子. 实际上, $\forall x \in C[a,b]$, $\|x\| \leqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}|(Tx)(s_1) - (Tx)(s_2)| &= \left|\int_a^b [K(s_1,t) - K(s_2,t)]x(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)|\,|x(t)|\mathrm{d}t. \\ &\leqslant \int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

$K(s,t)$ 是连续函数, 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|s_1 - s_2| < \delta$ 时,

$$|K(s_1,t) - K(s_2,t)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

此时

$$|(Tx)(s_1) - (Tx)(s_2)| < \varepsilon.$$

这说明 T 将 $C[a,b]$ 的单位球映射为等度连续的函数族. 由 1.4 节空间 $C(\Omega)$ 中集合相对紧的 Arzela-Ascoli 定理知道后者是相对紧集. 所以 T 是紧算子.

例 3.3.3 若 $K(s,t)$ 仍是 $a \leqslant t,s \leqslant b$ 上的连续函数, $0<\alpha<1$, 考虑算子

$$(Tx)(s)=\int_a^b \frac{K(s,t)x(t)}{|s-t|^\alpha}\mathrm{d}t, \qquad \forall x\in C[a,b]. \tag{3.3.5}$$

我们证明 T 仍是紧算子. 注意这里核函数在 $t=s$ 时有可能具有奇异性.

为此考虑函数

$$K_n(s,t)=\begin{cases} K(s,t), & |s-t|>\dfrac{1}{n}, \\ n^\beta|s-t|^\beta K(s,t), & 0<|s-t|\leqslant\dfrac{1}{n}, \\ 0, & s=t \end{cases}$$

和算子

$$(T_nx)(s)=\int_a^b \frac{K_n(s,t)x(t)}{|s-t|^\alpha}\mathrm{d}t, \qquad \forall x\in C[a,b],$$

其中 $\alpha<\beta<1$. 容易验证 $\dfrac{K_n(s,t)}{|s-t|^\alpha}$ 是 $a\leqslant t,s\leqslant b$ 上的连续函数. 由例 3.3.2 知 T_n 是紧算子. 但由

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{|K_n(s,t)-K(s,t)|}{|s-t|^\alpha}\mathrm{d}t &\leqslant \int_{\{|s-t|\leqslant\frac{1}{n}\}} \frac{|K(s,t)|}{|s-t|^\alpha}\mathrm{d}t \\ &\leqslant C\int_{\{|\theta|\leqslant\frac{1}{n}\}}\frac{\mathrm{d}\theta}{|\theta|^\alpha}\to 0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

知道 $\|T-T_n\|\to 0$, 定理 3.3.4(2) 保证了 T 是紧算子.

例 3.3.4 设有无穷矩阵 (a_{ij}), 满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty$. 定义算子 $T: l^2\to l^2$, 当 $x=(x_n)$, $Tx=y=(y_n)$ 时

$$y_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j \qquad (i=1,2,\cdots).$$

T 的有界性由 Hölder 不等式得出, 容易估计出

$$\|T\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

现在设 $T_n : l^2 \to l^2$ 是这样的算子, 其 n 阶主子阵与上述矩阵的 n 阶主子阵一样, 其余位置上的元素都为 0, 则 T_n 是有界的有限秩算子, 从而是紧算子. 又由于

$$\|T - T_n\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

所以 T 也是紧算子.

有限秩算子是最简单的一类算子, 一个算子如果能够作为有限秩算子的极限, 对于它的研究将是方便的. 可惜并非每个紧算子都可以看成这样的极限. 在 2.3 节的末尾我们曾经介绍过具有Schauder 基的Banach 空间的一些性质. 这里我们证明一个具有Schauder 基的Banach 空间上的紧算子是有限秩算子的极限.

定理 3.3.7　设 X 是具有Schauder 基的Banach 空间, 则 X 上的每个紧算子是一列有限秩有界算子的极限.

证明　设 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是 X 的Schauder 基, 则

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) e_n, \qquad \forall x \in X.$$

$\forall n \geqslant 1$, 定义

$$T_n x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(Tx) e_i, \tag{3.3.6}$$

则 T_n 是有限秩有界算子. 记 $T_n = P_n T, P_n$ 的定义见定理 2.3.8, 在那里我们有 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|P_n\| \leqslant K$. $\{Tx : \|x\| \leqslant 1\}$ 是相对紧集. 因此 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Tx_1, \cdots, Tx_m$ 是它的 ε 网, 即 $\forall x$, $\|x\| \leqslant 1$, $\exists x_i, 1 \leqslant i \leqslant m$ 使得

$$\|Tx - Tx_i\| < \varepsilon. \tag{3.3.7}$$

由于 $T_n x_i \to Tx_i$ $(i = 1, \cdots, m)$, 故 $\exists n_0$, 当 $n \geqslant n_0$ 时

$$\|T_n x_i - Tx_i\| < \varepsilon \qquad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{3.3.8}$$

若 $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$, 选取 x_i 如上, 由 (3.3.6), (3.3.7) 得出

$$\begin{aligned}
\|Tx - T_n x\| &\leqslant \|Tx - Tx_i\| + \|Tx_i - T_n x_i\| + \|T_n x_i - T_n x\| \\
&\leqslant \|Tx - Tx_i\| + \|Tx_i - T_n x_i\| + \|P_n T x_i - P_n T x\| \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + K\varepsilon = (2 + K)\varepsilon,
\end{aligned}$$

于是 $\|T-T_n\|\to 0$.

上述定理的结论是否能够推广到一般可分空间上去,这曾经是一个长期未能解决的问题. 直到 1973 年芬兰数学家 Enflo 给出了一个可分自反空间的例子. 它上面存在紧算子不能成为有限秩有界算子的极限, 给了上述问题以否定的回答. 当然, 此空间也不会具有Schauder 基.

3.4 自反空间与一致凸空间

在 3.3 节我们已经定义过自反空间, 当 X 是自反空间时, 自然嵌入映射 $J:X\to X^{**}$ 是到上的等距同构. 此时 X 必是Banach 空间. 注意自反空间定义中到上的映射 J 一定要求是自然嵌入, James 曾经给出过例子, 一个Banach 空间 X 与其二次共轭空间 X^{**} 等距同构, 但自然嵌入映射 J 却不是相应的到上的等距映射, 于是这样的空间 X 不是自反的. 这告诉我们, 在应用自反空间的性质时必须谨慎行事. 自反空间有许多优良的性质, 特别是其弱紧性质时常会被用到. 对此本节将着重加以介绍. 先让我们来看几个例子.

例 3.4.1 Φ^n, l^p, $L^p[a,b](1<p<\infty)$ 都是自反空间.

这里仅验证 $L^p[a,b]$ 的自反性. 由定理 3.1.2 已经知道当 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时, $L^p[a,b]^{**}=L^q[a,b]^*=L^p[a,b]$. 利用两个等距同构映射即可得到 $L^p[a,b]$ 与 $L^p[a,b]^{**}$ 之间到上的等距同构映射. 记此映射为 $\varphi: L^p[a,b]\to L^p[a,b]^{**}$, $x|\to\varphi_x$, 我们验证 φ 即是自然嵌入 J. 实际上, 对于任何 $f\in L^p[a,b]^*$, 若 f 对应于函数 $\xi\in L^q[a,b]$, 由定理 3.1.2 的证明, φ_x 作为 $L^p[a,b]^*$ 上的线性泛函, f 作为 $L^p[a,b]$ 上的线性泛函对应地有

$$\varphi_x(f)=\int_a^b\varphi_x(t)\xi(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x(t)\xi(t)\mathrm{d}t=f(x),$$

f 是任意的, 所以 $Jx=\varphi_x$, 这说明 φ 即是 J.

例 3.4.2 c_0, l^1, $L^1[a,b]$ 都不是自反的.

这里仅验证 l^1, 我们知道 $(l^1)^*=l^\infty$, 并且空间 l^1 是可分的, l^∞ 不可分. 若 l^1 自反, 则 $(l^\infty)^*=l^1$, 这与定理 3.2.10 的结论矛盾.

定理 3.4.1 若 X 是自反空间, 则 X 的任一闭线性子空间 Y 是自反空间.

证明 设 $Y\subset X$ 是闭线性子空间, $J':Y\to Y^{**}$ 是自然嵌入映射. $\forall y^{**}\in Y^{**}$, $x^*\in X^*$, 记 $x^*|_Y$ 是 x^* 在 Y 上的限制, 并且令

$$x^{**}(x^*)=y^{**}(x^*|_Y),\tag{3.4.1}$$

则 $x^{**} \in X^{**}$, 于是存在 $x \in X, J(x) = x^{**}$.

现在证明 $x \in Y$. 若不然, Y 是闭子空间, $x \overline{\in} Y$, 则存在 $x_0^* \in X^*$, $x_0^*(x)=1$, $x_0^*(y)=0, \forall y \in Y$. 于是

$$1 = x_0^*(x) = x^{**}(x_0^*) = y^{**}(x_0^*|_Y) = 0,$$

矛盾. 由此改记 $x = y$.

$\forall y^* \in Y^*$, y^* 可以延拓为 X 上的连续线性泛函 x^*, 使得 $x^*|_Y = y^*$, 从而由 (3.4.1) 得到

$$y^*(y) = x^*(x) = x^{**}(x^*) = y^{**}(y^*).$$

y^* 是任意的, 故 $J'y = y^{**}$. J' 到上, Y 自反.

利用类似的方法可以证明下面定理, 这里不再列出它们的详细证明.

定理 3.4.2 设 X 是Banach 空间, 则

(1) X 自反当且仅当 X^* 自反.

(2) 若 X 自反, M 是 X 的闭子空间, 则商空间 X/M 自反.

定理 3.4.3 设 X 是线性赋范空间, 则以下条件等价:

(1) X 自反.

(2) X 中任一有界序列包含有 w 收敛的子序列.

(3) X 的闭单位球 $S(X)$ 是 w 序列紧集.

(4) $\forall f \in X^*$, 存在 $x \in X$, $\|x\| = 1$ 使得 $f(x) = \|f\|$.

证明 (1)⇒(2). 设 $\{x_n\}$ 是 X 中任一有界序列, 如 $\|x_n\| \leqslant M$, $n \geqslant 1$. 考虑 $Y = \overline{\mathrm{span}}\{x_n\}$, Y 是 X 的闭线性子空间, 由定理 3.4.1, Y 自反. 注意到 Y 是可分的, 故 Y^* 可分, 若 $J' : Y \to Y^{**}$ 是自然嵌入, $\{x_n\}$ 是 Y 中的有界序列, 从而 $\{J'x_n\}$ 是 Y^{**} 中的有界序列. 根据定理 3.2.18, 有子序列 $\{J'x_{n_k}\}$ 及 $y_0^{**} \in Y^{**}$, $J'x_{n_k} \xrightarrow{w^*} y_0^{**}$. 由于 Y 是自反的, 故存在 $y_0 \in Y, J'y_0 = y_0^{**}$, 即 $\forall y^* \in Y^*$,

$$(J'x_{n_k})(y^*) \to (J'y_0)(y^*).$$

现在, 对于 $x^* \in X^*$, 设 $y^* = x^*|_Y$, 则

$$\begin{aligned} x^*(x_{n_k}) &= y^*(x_{n_k}) = (J'x_{n_k})(y^*) \to (J'y_0)(y^*) \\ &= y^*(y_0) = x^*(y_0). \end{aligned}$$

故 $x_{n_k} \xrightarrow{w} y_0$.

(2)⇔(3) 是显然的.

(3)⇒(4). $f=0$ 的情况是明显的. 设 $f\neq 0$, $f\in X^*$, 由 $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|$, 取 $x_n\in X$, $\|x_n\|=1$,

$$\|f\|-\frac{1}{n}<|f(x_n)|\leqslant\|f\|. \tag{3.4.2}$$

由 (3), $\{x_n\}$ 中有子序列 $x_{n_k}\xrightarrow{w}x_0$, $\|x_0\|\leqslant\varliminf\limits_{n_k\to\infty}\|x_{n_k}\|\leqslant 1$. 特别地,

$$f(x_0)=\lim_{n_k\to\infty}f(x_{n_k}).$$

但由 (3.4.2), 必有

$$|f(x_0)|=\lim_{n_k\to\infty}|f(x_{n_k})|=\|f\|.$$

现在 $|f(x_0)|\leqslant\|f\|\ \|x_0\|$, 故 $\|x_0\|\geqslant 1$, 从而 $\|x_0\|=1$. 若 $f(x_0)=re^{\mathrm{i}\theta}$, 取 $x=e^{-\mathrm{i}\theta}x_0$, 则 $\|x\|=\|x_0\|=1$, 并且

$$f(x)=e^{-\mathrm{i}\theta}f(x_0)=r=|f(x_0)|=\|f\|.$$

(4)⇒(1). 一个初等的但较复杂的证明由 James 作出 (见 Israel J. Math. 13(1972), 这里略去).

例 3.4.3 $C[0,1]$ 不是自反空间. 取 $x_n(t)=t^n$, $n\geqslant 1$. x_n 是有界序列. 若有子序列弱收敛于 x_0, 则此序列是点点收敛的, 从而 $x_0(t)=0, 0\leqslant t<1$, $x_0(1)=1$. 但 $x_0\overline{\in}C[0,1]$. 这说明 $C[0,1]$ 的闭单位球不是 w 序列紧的.

定理 3.4.3(3) 说明自反空间中任一有界闭凸子集是弱序列紧集. 这一性质在逼近论和凸分析中有很多应用. 特别地, 本章 3.2 节关于弱紧集的某些结果可以用于自反空间情况.

推论 3.4.1 设 X 是自反空间, $E\subset X$ 是闭凸子集, 则

(1) $\forall x_0\in X\backslash E$, 存在 x_0 关于 E 的最佳逼近元 y_0,

$$\|x_0-y_0\|=\inf_{y\in E}\|x_0-y\|.$$

(2) 若 E 还是有界的并且 $\varphi:E\to R$ 是弱下半连续的, 则 $\exists x_0\in E$ 使得

$$\varphi(x_0)=\inf_{x\in E}\varphi(x).$$

现在让我们介绍关于一致凸空间的知识. “一致凸”和“严格凸” 一样都是几何概念. 仅仅从定义上来看, 一致凸空间似乎与自反空间没有什么联系, 但事实上一致凸空间却是自反空间的特例 (见定理 3.4.5).

定义 3.4.1　线性赋范空间 X 称为是一致凸的, 若 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon\leqslant 2)$, 存在 $\delta>0$, 使得对于任何 $x,\ y\in X$, $\|x\|\leqslant 1$, $\|y\|\leqslant 1$, 只要 $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$, 则

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leqslant 1-\delta. \tag{3.4.3}$$

例 3.4.4　Hilbert 空间是一致凸的.

实际上, 由平行四边形公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\qquad \forall x,y\in X.$$

若 $\|x\|\leqslant 1$, $\|y\|\leqslant 1$, $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$, 则 $\|x+y\|^2\leqslant 4-\varepsilon^2$, 于是

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leqslant\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}=1-\delta,\qquad \delta=1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

此外空间 $l^p, L^p[a,b](1<p<\infty)$ 也是一致凸空间.

由定义容易知道, 每个一致凸空间是严格凸的.

例 3.4.5　由于 $l^1, L^1[a,b], C[a,b], L^\infty[a,b], c, c_0$ 不是严格凸的, 所以也不是一致凸的.

定理 3.4.4　Banach 空间X 是一致凸的当且仅当 $\forall x_n,y_n\in X$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

证明　先设 $\|x_n\|=\|y_n\|=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n-y_n\|\geqslant\varepsilon>0$, 则有无穷多个 x_{n_k}, y_{n_k} 使得 $\|x_{n_k}-y_{n_k}\|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 由一致凸性定义, $\left\|\frac{x_{n_k}+y_{n_k}}{2}\right\|\leqslant 1-\delta$, 其中 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 从而 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n+y_n\|<2$, 矛盾.

现设 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n\|=1$, 取 $x_n'=\frac{x_n}{\|x_n\|}$, $y_n'=\frac{y_n}{\|y_n\|}$, 则 $\|x_n'\|=\|y_n'\|=1$, 并且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n'+y_n'\|=2$, 由上面定理证明知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n'-y_n'\|=0$, 从而得到

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=\lim_{n\to\infty}\|\,x_n'\|x_n\|-y_n'\|y_n\|\,\|=0.$$

反之, 若 X 不是一致凸的, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 x_n,y_n, 使得 $\|x_n\|\leqslant 1$, $\|y_n\|\leqslant 1$, $\|x_n-y_n\|\geqslant\varepsilon_0$, 但 $\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|\geqslant 1-\frac{1}{n}$, 这与定理中所说条件矛盾.

推论 3.4.2　设 X 是一致凸空间, $x_n\in X$, 若 $\|x_n\|\to 1$, 并且 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_n+x_m\|=2$, 则 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$.

定理 3.4.5 一致凸Banach 空间是自反的.

证明 对于每个 $x_0^{**}\in X^{**}$, 不失一般性设 $\|x_0^{**}\|=1$, 我们证明存在 $x_0\in X$, 使得 $Jx_0=x_0^{**}$, 其中 J 是自然嵌入映射.

实际上对于 x_0^{**}, $\forall n\geqslant 1$, 存在 $x_n^*\in X^*$, $\|x_n^*\|=1$, 使得

$$x_0^{**}(x_n^*)>\|x_0^{**}\|-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}. \tag{3.4.4}$$

由第二 Helly 矩量定理 (定理 2.5.7), 对于 $x_1^*,\cdots,x_n^*$ 和 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, 存在 $x_n\in X$ 使得

$$x_0^{**}(x_i^*)=x_i^*(x_n),\qquad i=1,\cdots,n, \tag{3.4.5}$$

并且

$$\|x_n\|\leqslant\|x_0^{**}\|+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n}.$$

于是

$$1-\frac{1}{n}<x_0^{**}(x_i^*)=x_i^*(x_n)\leqslant\|x_i^*\|\,\|x_n\|<1+\frac{1}{n},$$

由此得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=1$. 再由

$$\begin{aligned}2\left(1-\frac{1}{n}\right)&<2x_0^{**}(x_i^*)=x_i^*(x_n)+x_i^*(x_m)\\&\leqslant\|x_i^*\|\,\|x_n+x_m\|=\|x_n+x_m\|\leqslant 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

得出 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m+x_n\|=2$. 上面推论 3.4.2 说明 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$. 换句话说, $\{x_n\}$ 是Cauchy 序列. X 完备, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 显然 $\|x_0\|=1$.

对于 (3.4.4), 固定 i, 令 $n\to\infty$, 则得到 $x_0^{**}(x_i^*)=x_i^*(x_0)$.

x_0 是唯一的. 实际上若另有 $x_0'\in X,\|x_0'\|=1,x_0'\neq x_0$, 并且 $\forall i,x_0^{**}(x_i^*)=x_i^*(x_0')$, 根据一致凸性, 必有 $\|x_0+x_0'\|<2$, 但由

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant 2x_0^{**}(x_i^*)=x_i^*(x_0+x_0')\leqslant\|x_0+x_0'\|$$

得出 $\|x_0+x_0'\|\geqslant 2$, 矛盾.

若 $x^*\in X$ 是任一元, 考虑序列 $x^*,x_1^*,x_2^*,\cdots$, 重复上面过程可得到 $\overline{x}_0$, $\|\overline{x}_0\|=1$, 并且

$$x_0^{**}(x^*)=x^*(\overline{x}_0),\quad x_0^{**}(x_i^*)=x_i^*(\overline{x}_0),\qquad i\geqslant 1.$$

由唯一性知道 $\overline{x}_0=x_0$ 并且 $x_0^{**}(x^*)=x^*(x_0)$. x^* 的任意性说明 $Jx_0=x_0^{**}$. J 到上, 故 X 自反.

定理 3.4.6 设 X 是一致凸空间, $x_n, x \in X$, 则 $x_n \to x$, 当且仅当 $x_n \xrightarrow{w} x$, 并且 $\|x_n\| \to \|x\|$.

证明 必要性是明显的, 现证充分性. 设 $x_n \xrightarrow{w} x$, 并且 $\|x_n\| \to \|x\|$, 若 $x = 0$, 结论是显然的. 若 $x \neq 0$, 不失一般性, 设 $\|x\| = 1$, 则有 $\|x_n\| \to 1$, 从而

$$\varlimsup_{m,n\to\infty} \|x_m + x_n\| \leqslant \lim_{m,n\to\infty} (\|x_m\| + \|x_n\|) = 2.$$

取 $f \in X^*, \|f\| = 1, f(x) = \|x\| = 1$, 则由 $x_n \xrightarrow{w} x$,

$$\lim_{m,n\to\infty} f(x_m + x_n) = \lim_{m,n\to\infty} (f(x_m) + f(x_n)) = 2f(x) = 2,$$

这说明

$$\varliminf_{m,n\to\infty} \|x_m + x_n\| \geqslant 2.$$

总之, $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_m + x_n\| = 2$. 由推论 3.4.2, $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 从而是收敛序列. 由于 $x_n \xrightarrow{w} x$, 其极限必是 x, 即 $x_n \to x$. 证毕.

定理 3.4.6 中所叙述的性质称为空间 X 的H 性质.

习 题 3

1. 证明 $c_0^* = l^1$, 其中 $f \in c_0^*$ 时有序列 $(\alpha_n) \in l^1$ 使得

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \qquad \forall x = (x_n) \in c_0.$$

2. 证明 $c^* = l^1$, 其中 $f \in c^*$ 时有序列 $(\alpha_n) \in l^1$ 和 $\alpha \in \varPhi$ 使得

$$f(x) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \qquad \forall x = (x_n) \in c.$$

3. 设 $1 < p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ 是线性赋范空间. $X = X_1 \times X_2$, 定义

$$\|x\| = \left(\|x_1\|_1^p + \|x_2\|_2^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall x = (x_1, x_2) \in X.$$

证明:

(1) X 上的线性泛函的一般形式是

$$f((x_1, x_2)) = f_1(x_1) + f_2(x_2), \qquad f_1 \in X'_1, f_2 \in X'_2.$$

(2) $f \in X^*$ 当且仅当 $f_1 \in X_1^*, f_2 \in X_2^*$, 并且此时

$$\|f\| = (\|f_1\|_1^q + \|f_2\|_2^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(3) $(X_1 \oplus X_2)_p^* = (X_1^* \oplus X_2^*)_q$, $(X_1 \oplus X_2)_p$ 即是以上述 $\|\cdot\|$ 为范数的乘积空间 $X_1 \times X_2$.

4. 泛函序列 $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$ 在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中 w 收敛于 0.

5. 设 X 是线性赋范空间, X^* 是 X 的共轭空间, $x_n, x \in X, f_n, f \in X^*$. 若 $x_n \xrightarrow{w} x, f_n \xrightarrow{s} f$, 则 $f_n(x_n) \to f(x)$.

6. 若 $T \in B(X,Y), x_n, x \in X$ 并且 $x_n \xrightarrow{w} x$, 则 $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

7. 验证泛函序列 $g_n(x) = \int_0^1 x(t)t^n\mathrm{d}t$ 在 $L^\infty[0,1]$ 中 w^*收敛于 0.

8. 设 X 是 Banach 空间, 则共轭空间 X^* 中的 w^* 有界集是 (范数) 有界集.

9. 利用开映射定理证明: 若 X 是 Banach 空间, $J: X \to X^{**}$ 是自然嵌入算子, 并且 X 不是自反的, 则 $J(X)$ 在 X^{**} 中是第一纲集.

10. 证明 w 下半连续泛函是下半连续的. 范数是 w下半连续的.

11. 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的有界序列, 若 $\forall t \in [a,b]$, $x_n(t) \to x(t)$, 则存在 $\{x_n\}$ 的凸组合的序列在 $[a,b]$ 上一致收敛于 x.

12. 设 $1 \leqslant p < \infty$, $\{x_n\}$ 是 l^p 中的一列元素, 则存在 $\{x_n\}$ 的线性组合的序列以范数收敛于 x_0, 当且仅当 $\forall f \in (l^p)^*$, $f(x_n) = 0$ 时, $f(x_0) = 0$.

13. 空间 c_0 不是 w 序列完备的.

14. 应用 Radon-Nikodym 定理证明 $L^1[a,b]$ 是 w 序列完备的.

15. 证明 l^2 的闭单位球面 $S_p(l^2)$ 是范数闭集但不是 w 序列闭集.

16. 设有 $T: l^p \to l^p (1 < p < \infty), T(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$, 试求 T 的共轭算子 T^*.

17. 设 X, Y 是 Banach 空间, $T \in B(X,Y)$, T^* 是 T 的共轭, 证明 $R(T)$ 在 Y 中稠密当且仅当 T^* 是一一的, T 到上当且仅当 T^* 是一一的并且 $R(T^*)$ 在 X^* 中闭.

18. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 证明线性算子

$$T: l^p \to l^p,\ (x_1, x_2, \cdots) \mapsto \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right)$$

是紧算子.

19. 证明 $T: C[0,1] \to C[0,1], (Tx)(t) = \int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是紧算子, 而 $(Sx)(t) = tx(t)$ 不是紧算子.

20. 设 X 是线性赋范空间, Y 是 Banach 空间, $T \in B(X,Y)$. 证明若 T^* 是紧算子, 则 T 也是.

21. 设 X 是 Banach 空间, $\dim X = \infty$. T 是紧算子, 则 T 是一一的就不可能是到上的.

22. 设 X 是线性赋范空间, $T \in B(X)$, T 紧并且 $T^2 = T$, 则 $\dim T(X) < \infty$.

23. 证明若 X 是自反空间, 则定理 3.3.6 的逆成立.

24. 设 X 是自反空间, 则 X 可分当且仅当 X^* 可分, X^* 中序列的 w^*收敛等价于 w收敛.

25. 自反空间是 w 序列完备的.

第 4 章　Hilbert 空间的几何学

在第 1 章中我们已介绍了内积空间的公理系统并给出过内积空间的若干例子. 内积空间是一种特殊的线性赋范空间, 因此对于一般线性赋范空间成立的那些结论对于内积空间也是适用的. 但由于具有 "内积" 这种结构, 使得它有着比一般线性赋范空间更为特殊的性质. 本章将叙述这些特殊性质：正交基的存在性、正交投影的概念及其相关问题、空间上线性泛函和算子的特殊表现形式. Hilbert 空间的理论已广泛的应用于许多学科和学科分支中去, 如在量子力学、概率论、Fourier 分析、调和分析等学科中就是如此. 近年来蓬勃发展起来的小波分析理论也建立在 Hilbert 空间的基本结构之上.

4.1　正交集与正交基

定义 4.1.1　设 H 是内积空间, $(\cdot\,,\,\cdot)$ 是其中的内积.

(1) 若 $x,y\in H$, $(x,y)=0$, 则称 x 与 y正交, 记为 $x\perp y$.

(2) 若 $M,N\subset H$ 并且 $(x,y)=0,\forall x\in M,y\in N$, 则称 M 与 N正交, 记为 $M\perp N$. 当 $M=\{x\}$ 时记为 $x\perp N$.

(3) 若 $E\subset H$ 并且 $\forall x,y\in E,x\neq y$, 则 $x\perp y$, 称 E 为正交集. 此外若 $\forall x\in E,||x||=1$, 则称 E 为规范正交集.

容易知道, $x\perp y$, 则 $y\perp x$, $x\perp x$ 当且仅当 $x=0$. 对于任何集合 $M,N\subset H$, 若 $M\perp N$, 则 $M\cap N\subset\{0\}$.

定理 4.1.1　设 H 是内积空间, $E\subset H$ 是正交集. 则对于任意有限多个元 $x_1,\cdots,x_n\in E$ 和 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\Phi$,

$$||\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n||^2=|\alpha_1|^2\,||x_1||^2+\cdots+|\alpha_n|^2\,||x_n||^2,\qquad(4.1.1)$$

从而若 E 不包含 0 元, E 是线性无关集.

证明　由正交性

$$\begin{aligned}||\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n||^2&=(\alpha_1\,x_1+\cdots+\alpha_nx_n,\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\\&=\sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_i\,x_i,\alpha_jx_j)\end{aligned}$$

$$=|\alpha_1|^2\|x_1\|^2+\cdots+|\alpha_n|^2\|x_n\|^2.$$

当 $x_i\neq 0\ (i=1,\cdots,n)$ 时, 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 不全为 0, 则 $\|\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\|\neq 0$, 即 $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\neq 0$.

定理 4.1.2 设 H 是内积空间, $E\subset H$ 是规范正交集, $x\in H$. 则

(1) 对于任一组 $e_1,\cdots,e_n\in E$,

$$\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{4.1.2}$$

(2) 数集 $\{(x,e):e\in E\}$ 中至多有可数多个不等于 0.

证明 (1) 设 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(x,\ e_i)e_i$, 则

$$\begin{aligned}0\leqslant\|x-x_n\|^2&=(x-x_n,x-x_n)\\&=\|x\|^2-(x,x_n)-(x_n,x)+\|x_n\|^2\\&=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2.\end{aligned}$$

故 (4.1.2) 成立.

(2) 考虑集合

$$E_j=\{e\in E:|(x,e)|>j^{-1}\},\qquad j=1,2,\cdots.$$

由 (4.1.2), E_j 中至多有有限多个元素, 又 $E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j$, 故得 (2).

推论 4.1.1 设 H 是内积空间, $E=\{e_n\}$ 是 H 中的规范正交集, 则

(1) $\forall x\in X$, Bessel 不等式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{4.1.3}$$

(2) $(x,e_n)\to 0$.

实际上由 (4.1.2), 令 $n\to\infty$ 得到 (4.1.3). 由其中级数收敛得到 $(x,e_n)\to 0$, 故 (2) 成立.

定义 4.1.2 设 H 是内积空间, $E=\{e_n\}$ 是 H 中的规范正交集, $x\in H$.

(1) 称每个 (x,e_n) 为 x 关于 E 的Fourier 系数.

(2) 称 (形式) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 为 x 关于 E 的Fourier 级数.

(3) 若 $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 按空间 H 的范数收敛, 称此级数为 x 关于 E 的Fourier展开式.

定理 4.1.3　设 H 是内积空间, $E = \{e_n\}$ 是 H 中的规范正交集, $x \in H$, 则以下诸条件等价:

(1) $x \in \overline{\text{span}}\, E$.

(2) $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$.　　(4.1.4)

(3) $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$　　(Parseval 等式).　　(4.1.5)

证明　(1) ⇒ (2). 不妨设 $u_n \in \text{span}E$, $u_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n}\alpha_i e_i$, $u_n \to x$. 取 $x_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n}(x, e_i)e_i$, 则 $(x_n, e_i) = (x, e_i)$, 即 $e_i \perp (x_n - x)$, $i = 1, \cdots, k_n$, 故 $\sum\limits_{i=1}^{k_n}(\alpha_i - (x,e_i))e_i \perp (x_n - x)$ 或者 $(u_n - x_n) \perp (x_n - x)$. 于是

$$\|u_n - x\|^2 = \|u_n - x_n + x_n - x\|^2 = \|u_n - x_n\|^2 + \|x_n - x\|^2 \geqslant \|x_n - x\|^2,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n - x\| = 0.$$

所以

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}(x, e_i)e_i = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n.$$

(2) ⇒ (3). 由 (2), $x = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$ 或者 $x_n \to x$, 由内积关于变元的连续性知道

$$\|x\|^2 = (x, x) = \lim_{n\to\infty}(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|(x, e_i)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2.$$

(3) ⇒ (1). 令 $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$, 由 (3),

$$\|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|(x, e_i)|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty}|(x, e_i)|^2 \to 0.$$

故 $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 但 $x_n \in \text{span}\, E$, 所以 $x \in \overline{\text{span}}\, E$.

定理 4.1.3 说明, 要 x 关于正交集 E 的Fourier 展开式成立, 必须并且只需 x 属于由 E 张成的闭线性子空间或者 x 关于 E 的 Parseval 等式成立.

下面定理给出了得到规范正交集的方法.

定理 4.1.4(Gram-Schmidt) 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中一列线性无关元素, 则存在 H 中的规范正交集 $E=\{e_n: n\geqslant 1\}$, 使得 $\forall n\geqslant 1$,

$$\mathrm{span}\{e_i: 1\leqslant i\leqslant n\}=\mathrm{span}\{x_i: 1\leqslant i\leqslant n\}.$$

证明 由 $x_1\neq 0$, 令 $y_1=x_1$, $e_1=\dfrac{y_1}{\|y_1\|}$. 显然

$$\mathrm{span}\,\{e_1\}=\mathrm{span}\,\{y_1\}=\mathrm{span}\,\{x_1\}.$$

令 $y_2=x_2-(x_2,e_1)e_1, e_2=\dfrac{y_2}{\|y_2\|}$, 则 $y_2\neq 0$, 否则 x_2 与 e_1, 从而与 x_1线性相关, 矛盾. 又 $(y_2,e_1)=(x_2,e_1)-(x_2,e_1)=0$, 从而 $(e_2,e_1)=\dfrac{1}{\|y_2\|}(y_2,e_1)=0$, 并且

$$\mathrm{span}\,\{e_1,e_2\}=\mathrm{span}\,\{e_1,x_2\}=\mathrm{span}\,\{x_1,x_2\}.$$

依照数学归纳法, 不妨设 $e_1,\cdots,e_{n-1}$ 已定义并且

$$\mathrm{span}\,\{e_i: 1\leqslant i\leqslant n-1\}=\mathrm{span}\,\{x_i: 1\leqslant i\leqslant n-1\}.$$

定义 $y_n=x_n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_n,e_i)e_i, e_n=\dfrac{y_n}{\|y_n\|}$, 则 $y_n\neq 0$. 否则

$$x_n\in \mathrm{span}\,\{e_i: 1\leqslant i\leqslant n-1\}=\mathrm{span}\,\{x_i: 1\leqslant i\leqslant n-1\}$$

与线性无关性相矛盾. 当 $1\leqslant j\leqslant n-1$ 时,

$$\begin{aligned}(y_n,e_j)&=(x_n,e_j)-\sum_{i=1}^{n-1}(x_n,e_i)(e_i,e_j)\\&=(x_n,e_j)-(x_n,e_j)=0.\end{aligned}$$

所以 $(e_n,e_j)=\dfrac{1}{\|y_n\|}(e_n,e_j)=0$. 同时

$$\begin{aligned}\mathrm{span}\{e_i: 1\leqslant i\leqslant n\}&=\mathrm{span}\{x_n,e_i: 1\leqslant i\leqslant n-1\}\\&=\mathrm{span}\,\{x_i: 1\leqslant i\leqslant n\},\end{aligned}$$

$\{e_n\}$ 即是所需要的序列.

定理 4.1.5(Riesz-Fischer)　设 H 是Hilbert 空间, $E=\{e_n\}$ 是 H 中的规范正交集. 则对于任一标量序列 $\{\alpha_n\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$, 存在 $x\in\overline{\operatorname{span}}\,E$, 使得 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ 并且每个 $\alpha_n=(x,e_n)$.

证明　令 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$ 知道, 当 $m\geqslant n$, $n\to\infty$ 时

$$\|x_m-x_n\|^2=\left\|\sum_{i=n+1}^{m}\alpha_i e_i\right\|^2=\sum_{i=n+1}^{m}|\alpha_i|^2\to 0.$$

$\{x_n\}$ 是Cauchy 序列, H 完备, 不妨设 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 则

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n,\qquad x\in\overline{\operatorname{span}}\,E.$$

此外, $\forall i\geqslant 1$,

$$(x,e_i)=\lim_{n\to\infty}(x_n,e_i)=\alpha_i.$$

故 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$.

定义 4.1.3　设 H 是内积空间, $E\subset H$ 是规范正交集.

(1) 称 E 是 H 的正交基, 若 E 不能扩充为更大的规范正交集.

(2) 称 E 是完备正交集, 若 $\forall x\in H$, x 关于 E 的 Parseval 等式成立.

(3) 称 E 是完全的, 若 $\forall x\perp E$, $x=0$.

非零内积空间中的所有规范正交集合以其包含关系构成半序集. 根据 Zorn 引理, 其中存在极大规范正交集. 这一极大规范正交集就是空间的正交基. 换句话说, 任一非零内积空间必存在正交基.

定理 4.1.6　设 H 是Hilbert 空间, $E\subset H$ 是规范正交集, 则以下条件等价：

(1) E 是 H 的正交基.

(2) $\overline{\operatorname{span}}\,E=H$.

(3) $\forall x\in H$, x 关于 E 具有Fourier 展开式.

(4) E 是完备正交系.

(5) $\forall x,y\in H$, $(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}$.

(6) E 是完全正交系.

证明 (1)⇒(2). 若有 $x \in H\backslash\overline{\operatorname{span}}\{E\}$, 记 $E_x = \{e_n : (x, e_n) \neq 0\}$. 由 Bessel 不等式, $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leqslant ||x||^2$. 根据 Riesz-Fischer 定理, $\exists y \in \overline{\operatorname{span}}\{E_x\}$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$. 显然 $x \neq y$, 设 $e_0 = \dfrac{x-y}{||x-y||}$, 则 $e_0 \notin E$. 由于 $(x, e_n) = (y, e_n)$, 所以 $e_n \perp e_0 (n \geqslant 1)$. 此外对于每个 $e \in E\backslash E_x, (x, e) = 0$, 从而 $(e_n, e) = 0$. 又 $(y, e) = 0$, 所以

$$(e_0, e) = \frac{1}{||x-y||}[(x, e) - (y, e)] = 0, \qquad \forall e \in E.$$

这说明 $E \cup \{e_0\}$ 是比 E 更大的规范正交集, 与 E 为正交基矛盾.

(2)⇔(3)⇔(4). 这是定理 4.1.3 中 $E = H$ 的情况.

(4)⇒(5). E_x, E_y 是可数集, 故不妨设 $E_x \cup E_y = \{e_n ; n \geqslant 1\}$. 允许某些系数为 0, 我们仍可根据 E 的完备性得到

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (e, e_n) e_n, \qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} (y, e_n) e_n,$$

从而

$$\begin{aligned}
(x, y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, \sum_{n=1}^{\infty} (y, e_n) e_n \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i, \sum_{i=1}^{n} (y, e_i) e_i \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) \overline{(y, e_i)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)}. \qquad (4.1.6)
\end{aligned}$$

(5) ⇒ (6). 若 $x \in H$, $x \perp E$, 若 $E_x = \{e_n : n \geqslant 1\}$, 由 (5),

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(x, e_n)} = 0,$$

故 $x = 0$.

(6)⇒(1). 若有 $E \cup \{e_0\}$ 是 H 的规范正交集并且 $e_0 \notin E$, 则 $e_0 \perp E$ 从而 e_0 关于 E 的Fourier 系数全为 0, 但 $e_0 \neq 0$, 与 (6) 矛盾. 证毕.

定理 4.1.6 说明, 在Hilbert 空间情况, 规范正交集 E 是正交基等价于 E 的完备性, 完全性以及 E 中元素的线性组合在 H 中的稠密性. 但需注意, 当 H 不完备时, E 的完全性不必与其他条件等价.

定理 4.1.7 设 H 是Hilbert 空间, 则

(1) H 可分当且仅当 H 有可数正交基.

(2) 当 H 的正交基有可数无穷多个元时, H 与 l^2 等距同构.

(3) 当 H 的正交基仅有有限多个元时, H 与 Φ^n 等距同构.

于是在等距同构的意义上说来, 可分Hilbert 空间要么是 l^2, 要么是 Φ^n.

证明 (1) 若 H 可分, 设 $x_1, x_2, \cdots$ 是 H 中的可数稠密集. 从 x_1 开始, 凡与前面诸元素线性相关的元素皆删去, 剩下元素的全体构成线性无关集. 显然它的线性组合全体仍在 H 中稠密, 利用 Gram-Schmidt 方法将它们正交化得到规范正交集 E, 容易知道 $\overline{\text{span}}\{E\} = \overline{\text{span}}\{x_n\} = H$. 由定理 4.1.6, E 是 H 的正交基. E 中有可数多个元.

反之, 若 H 的正交基有可数多个元, 则其中任意有限多个元素的有理系数 (或实部、虚部均为有理数的复系数) 线性组合在 H 中稠密, 这些元素的全体至多为可数集, 故 H 可分.

(2) 若 E 是可数无穷集, 定义

$$\varphi : H \to l^2, \quad \varphi(x) = ((x, e_1), (x, e_2), \cdots), \quad \forall x \in H.$$

φ 是线性映射, 由 Riesz-Fischer 定理, φ 是到上的. $\forall x, y \in H$,

$$\begin{aligned}
(\varphi(x), \varphi(y)) &= \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)\overline{(y, e_i)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i, \sum_{i=1}^{n} (y, e_i)e_i \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)e_i, \sum_{i=1}^{\infty} (y, e_i)e_i \right) \\
&= (x, y).
\end{aligned}$$

特别地, 若 $x = y$, 则 $\|\varphi(x)\| = \|x\|$, φ 是等距的一一映射, H 与 l^2同构.

(3) (3) 是 (2) 的特殊情况.

例 4.1.1 l^2 的标准基 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是它的正交基. 这里 e_n 的第 n 个坐标为 1, 其余为 0.

例 4.1.2 考虑定义在 $[0, 1]$ 上的 Rademacher 函数序列,

$$r_n(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^n \pi t, \quad t \in [0, 1], \quad n \geqslant 1.$$

容易验证 $E = \{r_n(t): n \geqslant 1\}$ 是 $L^2[0,1]$ 中的规范正交集. 但这一正交集不是完备的. 事实上 $r_0(t) = 1$ 与所有 $r_n(t)$正交但不属于上述集合, 定理 4.1.6(6) 说明 $\{r_n(t): n \geqslant 1\}$ 不完备 (即使添加 r_0 到 E 中仍得不到完备正交集).

为了得到由 E 扩展成的完备正交系, 让我们考察 Haar 函数系.

$$h_0^{(0)}(t) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$h_0^{(1)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right), \\ -1, & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right), \\ 0, & \text{其他}; \end{cases} \qquad h_1^{(1)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & t \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right), \\ -\sqrt{2} & t \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right), \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$h_1^{(2)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & t \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right), \\ -\sqrt{2} & t \in \left[\dfrac{3}{4}, 1\right), \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$h_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & t \in \left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n}, & t \in \left[\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots, 2^n; n = 1, 2, \cdots.$$

$\left\{h_n^{(k)}(t): 1 \leqslant k \leqslant 2^n, n = 0, 1, 2, \cdots\right\}$ 的正交性容易直接验证. 它还是规范正交系. 为了验证它是完备的, 由定理 4.1.6(6), 只须验证 $\forall f \in L^2[0,1]$. 若 $(f, h_n^{(k)}) = 0, \forall k, n$, 则 $f = 0$.

实际上, 由 $(f, h_n^{(k)}) = 0$ 可得出

$$\int_{\frac{2k-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} f(t)\mathrm{d}t = 0, \qquad \int_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{\frac{2k}{2^{n+1}}} f(t)\mathrm{d}t = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, 2^n; n = 0, 1, 2, \cdots.$$

定义

$$F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

由 f 的可积性, $F(t)$ 是连续函数. 但上面诸式表明

$$F\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, 2^n; n = 0, 1, 2, \cdots.$$

这种点在 $[0,1]$ 上稠密, 所以 $F(t)=0, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 从而 $f(t)$ 几乎处处为 0. 故 Haar 函数系是 $L^2[0,1]$ 的正交基.

例 4.1.3　现在考虑复空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 与集合 $\left\{e^{int}: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$. 容易验证

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{int}}dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m=n. \end{cases}$$

于是 $E=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的规范正交集. 我们要验证 E 是正交基. 为此要证明, 若 $x \in L^2[-\pi,\pi]$,

$$(x, e^{int}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}dt = 0 \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

则 $x(t)=0$, a.e..

设 $y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{t} x(\tau)d\tau$. 由可积性, $y(t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的绝对连续函数并且 $y'(t)=x(t)$, a.e.. 注意到 $y(-\pi)=0, y(\pi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x,1)=0$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)e^{-int}dt &= \frac{-1}{in}\left[y(t)e^{-int}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} y'(t)e^{-int}dt\right] \\ &= \frac{-1}{in}\left[-e^{-in\pi}y(\pi) + e^{in\pi}y(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}dt\right] \\ &= 0 \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).\end{aligned}$$

令 $\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt$. 当 $n=0$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[y(t)-\alpha]e^{-int}dt = \int_{-\pi}^{\pi} y(t)dt - 2\pi\alpha = 0.$$

若 $n \neq 0$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}[y(t)-\alpha]e^{-int}dt = \int_{-\pi}^{\pi} y(t)e^{-int}dt - \alpha\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}dt = 0.$$

于是对于任一三角多项式 $s(t)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[y(t)-\alpha]s(t)dt = 0.$$

另一方面, $y(t)-\alpha$ 是连续函数, 根据 Weierstrass 定理, $\forall \varepsilon > 0$, 存在三角多项式 $s(t)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{-ikt}$ 使得

$$|y(t)-\alpha-s(t)| < \varepsilon, \qquad \forall t \in [-\pi,\pi].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|y(t)-\alpha|^2\mathrm{d}t&=\int_{-\pi}^{\pi}(y(t)-\alpha)\overline{(y(t)-\alpha)}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\pi}^{\pi}(y(t)-\alpha)\overline{(y(t)-\alpha-s(t))}\mathrm{d}t\\&<\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}|y(t)-\alpha|\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon\sqrt{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|y(t)-\alpha|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

即

$$\int_{-\pi}^{\pi}|y(t)-\alpha|^2\mathrm{d}t\leqslant 2\pi\varepsilon^2.$$

$\varepsilon>0$ 是任意的, 故只有 $y(t)=\alpha$, 从而

$$x(t)=y'(t)=0,\qquad \text{a.e.}.$$

推论 4.1.2 $\forall x\in L^2[-\pi,\pi]$, 记 $\widehat{x}(n)=(x,e_n)$, 其中 $e_n=\dfrac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$, 则

(1) $x=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{x}(n)e_n$ 以 $L^2[-\pi,\pi]$范数收敛.

(2) $\|x\|_2^2=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{x}(n)|^2$.

4.2 正交投影

定义 4.2.1 设 H 是内积空间, $E\subset H$ 是线性子空间, $x\in H$. 若存在分解 $x=x_1+x_2$, 其中 $x_1\in E$, $x_2\perp E$, 则称 x_1 为 x 在 E 上的投影, 记为 $P_Ex=x_1$.

定理 4.2.1 设 H 是内积空间, $E\subset H$ 是线性子空间, $x\in H$, $x_1\in E$. 则以下条件等价:

(1) $P_Ex=x_1$.

(2) $\|x-x_1\|=\inf\limits_{z\in E}\|x-z\|$. (4.2.1)

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 若 x 有分解 $x=x_1+x_2$, 其中 $x_1\in E$, $x_2\perp E$, 则 $\forall z\in E$, $x_1-z\in E$, $x_2\perp(x_1-z)$, 于是

$$\|x-z\|^2=\|x_1-z+x_2\|^2=\|x_1-z\|^2+\|x_2\|^2\geqslant\|x_2\|^2=\|x-x_1\|^2.$$

注意到 $x_1\in E$, 故 $\|x-x_1\|=\inf\limits_{z\in E}\|x-z\|$.

(2) ⇒ (1). $\forall z \in E$, 考虑实变量 λ 的函数 $f(\lambda) = ||x - x_1 + \lambda z||^2$, $f(\lambda)$ 是连续的并且 (4.2.1) 说明 $f(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 取最小值. 现在由

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{||x - x_1 + \lambda z||^2 - ||x - x_1||^2}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \Big((x - x_1, z) + (z, x - x_1) + \lambda ||z||^2 \Big) \\
&= 2\mathrm{Re}(x - x_1, z),
\end{aligned} \tag{4.2.2}
$$

$f(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 是可微的, 故 $\mathrm{Re}(x-x_1, z) = 0$. 同样地, 将 z 换为 $\mathrm{i}z$ 得出 $\mathrm{Im}(x-x_1, z) = 0$, 从而 $(x - x_1, z) = 0$. $z \in E$ 是任意的, 最后得出 $(x - x_1) \perp E$. 故 $P_E x = x_1$.

定理 4.2.2(投影定理) 设 H 是Hilbert 空间, $E \subset H$ 是闭线性子空间, 则 $\forall x \in H$, $P_E x$ 存在且唯一.

证明 若 $x \in E$, 则 $P_E x = x$. 若 $x \notin E$, 取 $x_n \in E$ 使得 $||x - x_n|| \to d(x, E) = d$, 由于

$$
\begin{aligned}
||x_m - x_n||^2 &= ||(x - x_n) - (x - x_m)||^2 \\
&= 2(||x - x_n||^2 + ||x - x_m||^2) - 4 \left\| x - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \\
&\leqslant 2(||x - x_n||^2 + ||x - x_m||^2) - 4d^2 \to 0,
\end{aligned}
$$

$\{x_n\}$ 是Cauchy 序列. 不妨设 $x_n \to x_0$, E 闭, 所以 $x_0 \in E$. 现在

$$
||x - x_0|| = \lim_{n \to \infty} ||x - x_n|| = d = \inf_{z \in E} ||x - z||,
$$

由定理 4.2.1, $P_E x = x_0$.

由于Hilbert 空间是严格凸的, x_0 是唯一的最佳逼近元.

其实为了得到最佳逼近元, 定理 4.2.2 中的集合 E 可以是任一闭凸子集, x_0 的存在唯一性结论及其证明都不改变. 定理 4.2.2 和 4.2.1 还说明空间一点到闭子空间 (闭凸集) 的投影恰恰是这一点关于闭子空间 (闭凸集) 的最佳逼近元. 不仅如此, 在 Hilbert 空间上我们还可以定量地计算出一点到最佳逼近元的距离.

例 4.2.1 设 H 是Hilbert 空间, $E \subset H$ 是线性子空间, $\dim E = n$, $e_1, \cdots, e_n$

是 E 的一组规范正交基, 则 $\forall x \in H, P_E x = \sum\limits_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i$ 并且

$$d(x,E) = \left(\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2.3}$$

若 $\{e_n\}$ 是 H 中的规范正交集, $E = \overline{\operatorname{span}}\{e_n\}$, 则 $P_E x = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$ 并且

$$d(x,E) = \left(\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2.4}$$

实际上, 令 $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$, $x_2 = x - x_1$, 则 $x_1 \in E$, $\forall z \in E$, $z = \sum\limits_{i=1}^{n}(z,e_i)e_i$, 实际计算得到

$$(x_2, z) = (x - x_1, z) = (x, z) - (x_1, z) = 0,$$

故 $x_2 \perp E$, 从而 $P_E x = x_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$. 由投影定理

$$d(x,E) = \|x - x_1\| = (\|x\|^2 - \|x_1\|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n}|(x,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(4.2.4) 的结论类似得到.

推论 4.2.1 设 H 是Hilbert 空间, $E \subset H$ 是闭线性子空间, 记从 H 到 E 的投影算子是 P, 则

(1) $P: H \to E$ 是线性算子.

(2) $\|P\| \leqslant 1$. 若 $E = \{0\}$, 则 $P = 0$; 若 $E \neq \{0\}$, 则 $\|P\| = 1$.

(3) $E = R(P) = N(I - P)$, $\quad N(P) = R(I - P)$.

称 E 是 P 的投影子空间.

证明 (1) 设 $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$, 其中 $x_1, y_1 \in E, x_2, y_2 \perp E$, 则

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2),$$

其中 $\alpha x_1 + \beta y_1 \in E$. 而 $\forall z \in E, (x_2, z) = 0, (y_2, z) = 0$, 故

$$(\alpha x_2 + \beta y_2, z) = \alpha(x_2, z) + \beta(y_2, z) = 0.$$

所以 $\alpha x_2 + \beta y_2 \perp E$. 于是

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha Px + \beta Py,$$

P 是线性的.

(2) $\forall x \in H$, 若 $x = x_1 + x_2$ 是正交分解, 则 $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$, 从而

$$\|Px\|^2 = \|x_1\|^2 \leqslant \|x\|^2, \quad \|Px\| \leqslant \|x\|, \quad \|P\| \leqslant 1.$$

若 $E = \{0\}$, 则 $\forall x \in H$, $Px = 0$, 故 $P = 0$.

若 $E \neq \{0\}$, 则有 $x_1 \in E$, $\|x_1\| = 1$, 使得 $Px_1 = x_1$, $\|P\| \geqslant \|Px_1\| = \|x_1\| = 1$, 从而 $\|P\| = 1$.

(3) 由于 $y \in R(P)$ 当且仅当 $y = x_1 + x_2$ 时 $x_2 = 0$, 此即 $y - Py = 0$ 或者 $y \in N(I - P)$. 反过来也一样. 另一式子可同样证明.

定理 4.2.3　设 H 是Hilbert 空间, $E \subset H$ 是线性子空间. 记

$$E^{\perp} = \{x \in H : x \perp E\},$$

则

(1) $E^{\perp}$ 是 H 的闭线性子空间.

(2) 若 E 是闭的, 则 $E^{\perp\perp} = E$.

(3) 若 E 是闭的, 则 $H = E \oplus E^{\perp}$, 即

$$H = E + E^{\perp}, \quad E \cap E^{\perp} = \{0\}. \tag{4.2.5}$$

(4) 若 E 是闭的, $P : H \to E$ 是投影算子, 则 $E^{\perp} = N(P)$.

通常称 $E^{\perp}$ 是 E 的正交补空间. 由于 (4.2.5), 称 H 是 E 与 $E^{\perp}$ 的直和. 换句话说, (3) 表明Hilbert 空间的每个闭子空间存在正交补空间.

证明　(1) 若 $x, y \in E^{\perp}$, 则 $\forall z \in E$, $x \perp z$, $y \perp z$, 从而

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0,$$

故 $\alpha x + \beta y \in E^{\perp}$, $E^{\perp}$ 是线性子空间.

若 $x_n \in E^{\perp}$, $x_n \to x$, 则 $\forall z \in E$, $(x_n, z) = 0$. 由内积关于变元的连续性, $(x, z) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, z) = 0$, 故 $x \perp z$, $x \in E^{\perp}$, $E^{\perp}$ 是闭的.

(2) 设 E 是闭的, 则由 $E \perp E^{\perp}$ 知道 $E \subset E^{\perp\perp}$. 另一方面, 若 $x \in E^{\perp\perp}$, 则 $x \perp E^{\perp}$. 若 $x = x_1 + x_2, x_1 \in E, x_2 \perp E$, 则 $x_2 \in E^{\perp}$, 从而 $(x, x_2) = 0$. 于是

$$(x_2, x_2) = (x_1 + x_2, x_2) = (x, x_2) = 0,$$

故 $x_2 = 0$, $x = x_1 \in E$, 即 $E^{\perp\perp} \subset E$. 最后 $E = E^{\perp\perp}$.

(3) 由定理 4.2.2, $\forall x \in H$, $x = x_1 + x_2$, 其中 $x_1 \in E$, $x_2 \perp E$, 即 $x_2 \in E^{\perp}$, 从而 $H = E + E^{\perp}$. 另一方面 $E \cap E^{\perp} = \{0\}$. 故 $H = E \oplus E^{\perp}$.

(4) $\forall x \in H$, $x = x_1 + x_2$, 其中 $x_1 \in E, x_2 \perp E$. 故 $x \in E^{\perp}$ 当且仅当 $x_1 = 0$, 即 $Px = 0$ 或 $x \in N(P)$, 从而 $E^{\perp} = N(P)$.

定义 4.2.2 (1) 称线性算子 $T : X \to X$ 是幂等的, 若 $T^2 = T$.

(2) 设 H 是内积空间, 称 $T \in B(H)$ 是自伴算子, 若

$$(Tx, y) = (x, Ty), \quad \forall x, y \in H. \tag{4.2.6}$$

定理 4.2.4 设 H 是Hilbert 空间, $P \in B(H)$, 则下列诸条件等价:

(1) P 是投影算子.

(2) $P^2 = P$ 并且 P 是自伴的.

(3) $P^2 = P$ 并且 $N(P) \perp R(P)$.

(4) 若 H 是复空间, 以上条件还等价于

$$(Px, x) = ||Px||^2, \qquad \forall x \in H. \tag{4.2.7}$$

证明 (1)⇒(2). 设 P 是从 H 到闭线性子空间 E 上的投影算子, $\forall x \in H$, $Px \in E$, 故 $P^2 x = P(Px) = Px$, 于是 $P^2 = P$. 又 $\forall x, y \in H$, $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in E$, $x_2, y_2 \perp E$, 则

$$\begin{aligned}(Px, y) &= (x_1, y_1 + y_2) = (x_1, y_1)\\ &= (x_1 + x_2, y_1) = (x, Py).\end{aligned}$$

P 自伴.

(2)⇒(3). 若 $x \in N(P)$, 则 $Px = 0$; 若 $y \in R(P)$, 则 $\exists x_1 \in H$, $y = Px_1$. 于是

$$(x, y) = (x, Px_1) = (Px, x_1) = 0,$$

即 $N(P) \perp R(P)$.

(3)⇒(1). 令 $E = N(I - P)$, E 是 H 的闭线性子空间, 现在验证 P 是从 H 到 E 上的投影算子.

首先证明 $E = R(P)$. 实际上 $\forall y \in R(P)$, $\exists x \in H, y = Px = P^2 x$, 从而 $(I - P)(Px) = 0$, 即 $(I - P)y = 0, y \in N(I - P)$. 反之, $\forall y \in N(I - P)$, 则 $(I - P)y = 0$, $y = Py \in R(P)$, 故 $R(P) = N(I - P)$.

$\forall x \in H$, 记 $x = Px + (x - Px)$. 显然 $Px \in R(P) = E$. 又 $P(I-P)x = P(x - Px) = 0$, 于是 $x - Px \in N(P)$. 由 $N(P) \perp R(P)$ 得到 $x - Px \perp R(P) = E$, 所以 P 是从 H 到 E 上的投影算子.

现在设 H 是复空间.

(2)⇒(4). $||Px||^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (Px, x)$.

(4)⇒(2). 对于复空间 H 上的任一线性算子 A, 容易验证下面极化恒等式成立:

$$\begin{aligned} 4(Ax, y) = & (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) \\ & + \mathrm{i}(A(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}(A(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y). \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

现在若 $\forall x \in H$, $(Px, x)=||Px||^2$, 则 (Px, x) 是实数. 令 $A = P$, 实际计算知道

$$(Px, y) = \overline{(Py, x)} = (x, Py),$$

所以 P 是自伴的, 从而

$$(P^2x, x) = (Px, Px) = (Px, x), \qquad \forall x \in H.$$

令 $A = P^2 - P$, 则 $(Ax, x) = 0$, $\forall x \in H$. 再一次应用极化恒等式得到

$$(Ax, y) = 0, \qquad \forall x, y \in H.$$

于是 $A = 0$, 即 $P^2 = P$, P 是幂等的. (2) 成立. 证毕.

若 P 是投影算子, 则

$$(Px, x) = (P^2x, x) = (Px, Px) \geqslant 0, \qquad \forall x \in H.$$

利用这一点可以在投影算子之间建立一种半序关系: 设 P_E, P_M 分别是从 H 到闭线性子空间 E 和 M 上的投影算子, 若

$$(P_E x, x) \geqslant (P_M x, x), \qquad \forall x \in H, \tag{4.2.9}$$

则记为 $P_E \geqslant P_M$ (或 $P_M \leqslant P_E$).

定理 4.2.5　设 P_E, P_M 分别是Hilbert 空间中的投影算子. 则以下诸条件等价:

(1) $P_M \leqslant P_E$.

(2) $||P_M x|| \leqslant ||P_E x||$, $\forall x \in H$.

(3) $M \subset E$.

(4) $P_E P_M = P_M P_E = P_M$.

(5) $P_E - P_M$ 是投影算子.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). $\|P_M x\|^2 = (P_M x, x) \leqslant (P_E x, x) = \|P_E x\|^2$, 故 $\|P_M x\| \leqslant \|P_E x\|$, $\forall x \in H$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 若 $x \in M$, 则 $P_M x = x$,

$$\|P_E x\|^2 \geqslant \|P_M x\|^2 = \|x\|^2 = \|P_E x\|^2 + \|x - P_E x\|^2,$$

故 $x - P_E x = 0$ 或 $P_E x = x$, 即 $x \in E$, 所以 $M \subset E$.

(3) $\Rightarrow$ (4). $\forall x \in H$, $P_M x \in M \subset E$, 故 $P_E P_M x = P_M x$ 或者 $P_E P_M = P_M$. 另一方面, 设 $x = P_E x + x_2$, $x_2 \perp E$, 从而 $x_2 \perp M$. 又设 $x = P_M x + x_2'$, $x_2' \perp M$, 故 $x_2 - x_2' \perp M$,

$$P_E x - P_M x = -(x_2 - x_2') \perp M.$$

若记 $P_E x = P_M x + (P_E x - P_M x)$, 则此式为 $P_E x$ 关于线性子空间 M 的正交分解式, 从而 $P_M P_E x = P_M x$ 或 $P_M P_E = P_M$.

(4) $\Rightarrow$ (5). 此时

$$\begin{aligned}(P_E - P_M)^2 &= P_E^2 - P_E P_M - P_M P_E + P_M^2 \\ &= P_E - P_M - P_M + P_M = P_E - P_M,\end{aligned}$$

$P_E - P_M$ 是幂等的.

由于 P_E, P_M 的自伴性, $\forall x, y \in H$,

$$\begin{aligned}((P_E - P_M)x, y) &= (P_E x, y) - (P_M x, y) \\ &= (x, P_E y) - (x, P_M y) = (x, (P_E - P_M)y).\end{aligned}$$

$P_E - P_M$ 是自伴的, 故 $P_E - P_M$ 是投影算子.

(5) $\Rightarrow$ (1). 由

$$(P_E x, x) - (P_M x, x) = ((P_E - P_M)x, x) = \|(P_E - P_M)x\|^2 \geqslant 0$$

得到.

定理 4.2.6 设 P_E, P_M 分别是Hilbert 空间中的投影算子, 则以下条件等价:

(1) $E \perp M$.

(2) $R(P_E) \perp R(P_M)$.

(3) $P_EP_M=0$(称 P_E 与 P_M正交).

(4) P_E+P_M 是投影算子.

证明　(1) ⇒ (2). 由 $R(P_E)=E$, $R(P_M)=M$ 得到 (2) .

(2) ⇒ (3). $\forall x,y\in H,(x,P_EP_My)=(P_Ex,P_My)=0$, 故 $P_EP_My=0$, 从而 $P_EP_M=0$.

(3) ⇒ (4). $\forall x\in H$, 由 $P_EP_M=0$ 得 $P_EP_MP_E=0$, 于是

$$\begin{aligned}\|P_MP_Ex\|^2&=(P_MP_Ex,P_MP_Ex)=(P_Ex,P_M^2P_Ex)\\&=(P_Ex,P_MP_Ex)=(x,P_EP_MP_Ex)=0.\end{aligned}$$

故 $P_MP_E=0$. 现在

$$(P_E+P_M)^2=P_E^2+P_EP_M+P_MP_E+P_M^2=P_E+P_M.$$

又 $\forall x,y\in H$,

$$\begin{aligned}((P_E+P_M)x,y)&=(P_Ex,y)+(P_Mx,y)\\&=(x,P_Ey)+(x,P_My)\\&=(x,(P_E+P_M)y).\end{aligned}$$

所以 P_E+P_M 是投影算子.

(4) ⇒ (1). 由

$$\begin{aligned}P_E+P_M&=(P_E+P_M)^2=P_E^2+P_EP_M+P_MP_E+P_M^2\\&=P_E+P_EP_M+P_MP_E+P_M\end{aligned}$$

知道

$$P_EP_M+P_MP_E=0. \tag{4.2.10}$$

左乘 P_E, 则 $P_EP_M+P_EP_MP_E=0$; 右乘 P_E, 则 $P_EP_MP_E+P_MP_E=0$. 于是 $P_EP_M=P_MP_E$, 由 (4.2.10) 式, $P_EP_M=P_MP_E=0$.

$\forall x\in M$, $P_Mx=x$, 故 $0=P_EP_Mx=P_Ex$, $x\perp E$, 所以 $M\perp E$.

引理 4.2.1　设 H 是Hilbert 空间, $\{P_n\}$ 是 H 上的一列投影算子并且 P_n点点收敛于 P, 即 $\forall x\in H$, $P_nx\to Px$, 则 P 是投影算子.

证明　$\forall x\in H$, $P_nx\to Px$. 由 Banach-Steinhaus 定理, P 是有界线性算子. 又 $\forall y\in H$,

$$(Px,y)=\lim_{n\to\infty}(P_nx,y)=\lim_{n\to\infty}(x,P_ny)=(x,Py),$$

P 是自伴的. 另一方面

$$\begin{aligned}\|(P^2-P)x\| &= \|(P^2-P_nP+P_nP-P_n^2+P_n-P)x\| \\ &\leqslant \|(P-P_n)(Px)\|+\|P_n\|\,\|(P-P_n)x\|+\|(P-P_n)x\| \\ &\to 0.\end{aligned}$$

故 $(P^2-P)x=0, \forall x\in H$, 即 $P^2=P$. P 是幂等的, 从而 P 是投影算子.

定理 4.2.7 设 H 是 Hilbert 空间.

(1) 若 $\{Q_i\}$ 是一列两两正交 $(Q_iQ_j=0, i\neq j)$ 的投影算子, 则存在投影算子 P, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}Q_ix\to Px$ 点点成立.

(2) 若 $\{E_i\}$ 是一列单调上升 $(E_i\subset E_j, i\leqslant j)$ 的闭线性子空间并且 $E=\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i}$, 则 $P_{E_n}x\to P_Ex$点点成立.

证明 (1) 记 $P_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i$, 由定理 4.2.6, 利用数学归纳法不难证明 P_n 是投影算子. 由正交性

$$(Q_ix, Q_jx)=(Q_jQ_ix, x)=0 \qquad (i\neq j),$$

故

$$\begin{aligned}\|x\|^2\geqslant\|P_nx\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n}Q_ix, \sum_{j=1}^{n}Q_jx\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(Q_ix, Q_jx)=\sum_{i=1}^{n}\|Q_ix\|^2.\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|Q_ix\|^2<\infty$. 又

$$\left\|\sum_{i=n+1}^{m}Q_ix\right\|^2=\sum_{i=n+1}^{m}\|Q_ix\|^2\to 0 \qquad (n, m\to\infty),$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}Q_ix$ 是 Cauchy 序列. H 完备, 令 $Px=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}Q_ix$, 由引理 4.2.1, P 是投影算子.

(2) 由定理 4.2.6, $P_{E_{i+1}}-P_{E_i}$ 是投影算子并且 $P_{E_i}P_{E_j}=P_{E_i}(i<j)$. 故

$$(P_{E_{i+1}}-P_{E_i})(P_{E_{j+1}}-P_{E_j})=P_{E_{i+1}}-P_{E_{i+1}}+P_{E_i}-P_{E_i}=0.$$

又 $P_{E_1}(P_{E_{i+1}} - P_{E_i}) = P_{E_1} - P_{E_1} = 0$, 于是

$$P_{E_1},\ P_{E_2} - P_{E_1},\ P_{E_3} - P_{E_2}, \cdots$$

是一列两两正交的投影算子序列. 由 (1), $\forall x \in H$,

$$P_{E_n}x = P_{E_1}x + \sum_{i=1}^{n-1}(P_{E_{i+1}} - P_{E_i})x \to Px,$$

P 是投影算子. 现在验证 $P = P_E$.

记 $P = P_L$. 我们证明 $L = E$. 实际上, $\forall n \geqslant 1$, $E_n \subset E$. 由定理 4.2.5, 对于每个 $x \in H$,

$$\|P_{E_n}x\| \leqslant \|P_E x\|.$$

令 $n \to \infty$, 则

$$\|P_L x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_{E_n}x\| \leqslant \|P_E x\|,$$

于是 $L \subset E$.

另一方面, $\forall x \in E_n$, 当 $k \geqslant n$ 时, $x \in E_k$, 故 $P_{E_k}x = x$. 令 $k \to \infty$, 则 $P_L x = \lim\limits_{k\to\infty} P_{E_k}x = x$. 所以 $x \in L$, 从而 $E_n \subset L$. n 是任意的, 并且 E_n 单调增加, 于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset L$, L 闭, 所以 $E = \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} \subset L$.

总之, $L = E$, 故 $P = P_L = P_E$.

4.3　自伴算子与一 · 五线性泛函

Hilbert 空间上的线性泛函具有特殊的表现形式, 下面定理通常称为 Riesz 表现定理, 它对于我们认识 Hilbert 空间上的泛函和算子起到了关键作用.

定理 4.3.1(Riesz)　设 H 是Hilbert 空间. 则

(1) $\forall y \in H$, $f(x) = (x, y)$ 是 H 上的连续线性泛函并且

$$\|f\| = \|y\|. \tag{4.3.1}$$

(2) 若 f 是 H 上的连续线性泛函, 则存在唯一的 $y \in H$, 使得

$$f(x) = (x, y), \qquad \forall x \in H. \tag{4.3.2}$$

证明 (1) 设 $x_1, x_2 \in H$, $\alpha, \beta \in \Phi$, 则

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= (\alpha x_1 + \beta x_2, y) \\ &= \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \end{aligned}$$

f 是线性的. 又由不等式 $|f(x)| = |(x,y)| \leqslant ||x||\,||y||$ 知道 $||f|| \leqslant ||y||$, f 连续. 若 $y = 0$, 显然 $||f|| = 0 = ||y||$. 若 $y \neq 0$, 取 $x = y$, 则 $|f(y)| = (y,y) = ||y||^2$, 故 $||f|| \geqslant \left|\left|f\left(\dfrac{y}{||y||}\right)\right|\right| = ||y||$. 总之, $||f|| = ||y||$.

(2) 若 $f = 0$, 取 $y = 0$ 即可. 若 $f \neq 0$, 设 $E = N(f)$, E 是 H 的闭极大真子空间. 设 $H = E \oplus E^{\perp}$, $E^{\perp} \neq \{0\}$. 取 $z \in E^{\perp}$, $||z|| = 1$, 则 $f(z) \neq 0$. 令 $y = \overline{f(z)}z$, $y \in E^{\perp}$. 由于 $\forall x \in H$, $x - \dfrac{f(x)}{f(z)}z \in E$, 于是

$$\begin{aligned} 0 &= \left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z, y\right) \\ &= (x,y) - \left(\frac{f(x)}{f(z)}z, \overline{f(z)}z\right) \\ &= (x,y) - f(x)(z,z) \\ &= (x,y) - f(x), \end{aligned}$$

即 $f(x) = (x,y)$, $\forall x \in H$. 由 (1) 还知道 $||f|| = ||y||$.

若另有 $y' \in H$ 使得 $f(x) = (x, y')$, $\forall x \in H$, 则 $(x,y) = (x,y')$, $\forall x \in H$, 即 $(x, y - y') = 0$, 此时必有 $y = y'$.

称定理 4.3.1 中的 y 是线性泛函 f 的表现.

记 H 上的连续线性泛函全体为 H^*, 定理 4.3.1 表明从集合论的观点来看, H 与 H^* 是相同的.

定理 4.3.2 设 H 是Hilbert 空间, H^* 是 H 的共轭空间.

(1) 若映射 $T: H^* \to H$, $Tf = y$, 其中 y 是 f 的表现, 则

$$T(\alpha f_1 + \beta f_2) = \overline{\alpha}T(f_1) + \overline{\beta}T(f_2), \qquad \forall f_1, f_2 \in H^*, \tag{4.3.3}$$

T 是到上的并且 $\forall f \in H^*$, $||Tf|| = ||f||$.

(2)

$$(Tf, Tg) = \overline{(f,g)}, \qquad \forall f_1, g \in H^*. \tag{4.3.4}$$

(3) 若 J 是从 H 到 H^{**} 的自然嵌入算子, 则 J 是到上的线性映射并且 $||Jx|| = ||x||$, $\forall x \in H$.

通常称满足 (4.3.3) 的 T 是共轭线性的.

证明 (1) 设 $Tf_1 = y_1$, $Tf_2 = y_2$, $\alpha,\beta \in \Phi$, 则 $\forall x \in H$, $f_1(x) = (x,y_1)$, $f_2(x) = (x,y_2)$. 于是

$$\begin{aligned}(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) &= \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\\ &= \alpha(x,y_1) + \beta(x,y_2) = (x,\overline{\alpha}y_1 + \overline{\beta}y_2),\end{aligned}$$

即 $T(\alpha f_1 + \beta f_2) = \overline{\alpha}y_1 + \overline{\beta}y_2 = \overline{\alpha}T(f_1) + \overline{\beta}T(f_2)$. 由定理 4.3.1 知道 T 是到上的, 并且 $\|Tf\| = \|y\| = \|f\|$, $\forall f \in H^*$.

(2) 由 $\|T(f+g)\| = \|f+g\|$, $\|T(f-g)\| = \|f-g\|$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(Tf,Tg) &= \frac{1}{4}[\|T(f+g)\|^2 - \|T(f-g)\|^2]\\ &= \frac{1}{4}[\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2] = \mathrm{Re}(f,g).\end{aligned}$$

将 f 换为 $\mathrm{i}f$, 则

$$\mathrm{Re}(T\mathrm{i}f,Tg) = \mathrm{Re}(\mathrm{i}f,g).$$

又由 T 的共轭线性 $(Tf,Tg) = \mathrm{i}(T\mathrm{i}f,Tg)$, 所以

$$\mathrm{Im}(Tf,Tg) = \mathrm{Re}(T\mathrm{i}f,Tg) = \mathrm{Re}(\mathrm{i}f,g) = -\mathrm{Im}(f,g),$$

从而

$$(Tf,Tg) = \overline{(f,g)}, \qquad \forall f,g \in H^*.$$

(3) 设 J 是从 H 到 H^{**} 的自然嵌入算子, 则 $\forall x \in H$,

$$Jx(y) = y(x), \qquad \forall y \in H^*.$$

若 $x_1,x_2 \in H$, $\alpha,\beta \in \Phi$, 则

$$\begin{aligned}J(\alpha x_1 + \beta x_2)(y) &= y(\alpha x_1 + \beta x_2)\\ &= \alpha y(x_1) + \beta y(x_2) = \alpha Jx_1(y) + \beta Jx_2(y)\\ &= (\alpha Jx_1 + \beta Jx_2)(y),\end{aligned}$$

y 是任意的. 故 $J(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Jx_1 + \beta Jx_2$.

$\forall x^{**} \in H^{**}$, 由定理 4.3.1, 存在 $y^* \in H^*$, 使得 $x^{**}(f) = (f,y^*)$, $\forall f \in H^*$, 并且 $\|x^{**}\| = \|y^*\|$. 若 T 是 (1) 中的映射, 不妨设 $Ty^* = x$, 由 (2),

$$x^{**}(f) = (f,y^*) = (Ty^*,Tf) = f(x),$$

故 $Jx = x^{**}$. J 是到上的, 并且

$$\|Jx\| = \|x^{**}\| = \|y^*\| = \|Ty^*\| = \|x\|.$$

证毕.

这里注意 $T: H^* \to H$ 是共轭线性的但不是线性的. 因此按照线性同构的观点来看, 当 Φ 是复空间时, 尽管 H^* 与 H 之间存在一一的到上的映射, 但 $H^* \neq H$. 另一方面, 定理 4.3.2(3) 与我们关于一致凸空间的结论是一致的, 即 Hilbert 空间是自反空间, 从而 Hilbert 空间的闭单位球是 w 紧的等.

定义 4.3.1 设 H 是Hilbert 空间, $\varphi: H \times H \to \Phi$ 是一个映射.

(1) 称 φ 是一 · 五线性的, 若 $\forall x, y, z \in H$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

$$\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z),$$

$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}\varphi(x, y) + \overline{\beta}\varphi(x, z). \tag{4.3.5}$$

(2) 称 φ 是对称 (或 Hermite) 的, 若 $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.

(3) 称 φ 是有界的, 若存在 $C > 0$,

$$|\varphi(x, y)| \leqslant C\,\|x\|\;\|y\|, \qquad \forall x, y \in H,$$

此时记其范数为

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x, y)|: \; \|x\| \leqslant 1, \; \|y\| \leqslant 1\}. \tag{4.3.6}$$

下面定理可以看成有界一 · 五线性泛函的表现定理.

定理 4.3.3 设 H 是Hilbert 空间, 则 $\varphi: H \times H \to \Phi$ 是有界一 · 五线性泛函当且仅当存在 $T \in B(H)$, 使得

$$\varphi(x, y) = (Tx, y), \qquad \forall x, y \in H, \tag{4.3.7}$$

此时有 $\|\varphi\| = \|T\|$.

证明 充分性. 设 $T \in B(H)$, 记 $\varphi(x, y) = (Tx, y)$, 则 $\forall x, y, z \in H$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta y, z) &= (T(\alpha x + \beta y), z)\\ &= \alpha(Tx, z) + \beta(Ty, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z),\\ \varphi(x, \alpha y + \beta z) &= (Tx, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}\varphi(x, y) + \overline{\beta}\varphi(x, z).\end{aligned}$$

由于

$$\|\varphi(x,y)\| = |(Tx,y)| \leqslant \|Tx\|\,\|y\| \leqslant \|T\|\,\|x\|\,\|y\|,$$

于是 $\|\varphi\| \leqslant \|T\|$. φ 是有界的.

必要性. 若 $\varphi(x,y)$ 是有界一 · 五线性的, $\forall x \in H$, 令 $f(y) = \overline{\varphi(x,y)}$, $\forall y \in H$ 是 H 上的连续线性泛函. 实际上,

$$|f(y)| = |\varphi(x,y)| \leqslant \|\varphi\|\,\|x\|\,\|y\|.$$

由定理 4.3.1, 存在 $z \in H$, 使得 $f(y) = (y,z)$. 记 $T: H \to H$, $Tx = z$, 则一方面

$$(Tx,y) = (z,y) = \overline{(y,z)} = \overline{f(y)} = \varphi(x,y), \qquad \forall x,y \in H;$$

另一方面, 若 $Tx \neq 0$, 令 $y = \dfrac{Tx}{\|Tx\|}$, 则

$$\|Tx\| = \frac{(Tx,Tx)}{\|Tx\|} = \left(T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{Tx}{\|Tx\|}\right)\|x\| = \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right)\|x\| \leqslant \|\varphi\|\,\|x\|,$$

故 $\|T\| \leqslant \|\varphi\|$.

T 是由 φ 唯一决定的. 实际上, 若另有 T_1 使得

$$(T_1x,y) = \varphi(x,y) = (Tx,y), \qquad \forall x,y \in H,$$

则由 y 的任意性, 必有 $T_1x = Tx$. 再由 x 的任意性, 得到 $T_1 = T$. 最后由上面证明知道 $\|T\| = \|\varphi\|$.

定理 4.3.4　设 H 是Hilbert 空间, $A \in B(H)$, 则存在唯一的 $B \in B(H)$, 使得

$$(Ax,y) = (x,By), \qquad \forall x,y \in H. \tag{4.3.8}$$

证明　令 $\varphi(x,y) = (x,Ay)$, 则 φ 是一 · 五线性泛函, 并且

$$|\varphi(x,y)| = |(x,Ay)| \leqslant \|x\|\,\|Ay\| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|y\|,$$

φ 是有界的. 由定理 4.3.3, 存在 $B \in B(H)$, 使得 $\varphi(x,y) = (Bx,y)$, 于是 $(Ay,x) = (y,Bx)$. 交换 x 与 y 的符号即得 $(Ax,y) = (x,By)$.

定义 4.3.2　设 H 是Hilbert 空间, $T \in B(H)$, 若存在 $T^* \in B(H)$, 使得

$$(Tx,y) = (x,T^*y), \qquad \forall x,y \in H,$$

称 T^* 是 T 的伴随算子.

定理 4.3.4 说明, 对于任一有界线性算子 $T \in B(H)$, 相应于 T 的伴随算子存在. 此外, 在 4.2 节中我们讨论过自伴算子, 自伴算子即满足 $T^* = T$ 的伴随算子. 注意, 与 Banach 空间情况略有不同的是, 映射$T \to T^*$ 是共轭线性的.

命题 4.3.1 设 H 是Hilbert 空间, $A \in B(H)$, 以下诸条件等价:

(1) A 是自伴算子.

(2) $\varphi(x,y) = (Ax,y)$ 是对称的.

若 H 是复空间, 则以上还等价于:

(3) $\forall x \in H$, $\varphi(x,x) = (Ax,x)$ 是实数.

证明 (1)⇒(2). 只需注意 $\forall x, y \in H$,

$$\varphi(x,y) = (Ax,y) = (x,Ay) = \overline{(Ay,x)} = \overline{\varphi(y,x)}.$$

(2)⇒(1). 注意 $(Ax,y) = \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)} = \overline{(Ay,x)} = (x,Ay)$.

(1)⇒(3). 由 $\overline{\varphi(x,x)} = \overline{(x,Ax)} = (Ax,x) = \varphi(x,x)$ 知道 $\varphi(x,x)$ 是实数.

现在设 H 是复空间, 我们证明 (3)⇒(2) 成立. 实际上利用极化恒等式得到

$$\begin{aligned}4\varphi(x,y) =& 4(Ax,y)\\ =& (A(x+y),x+y) - (A(x-y),x-y)\\ &+\mathrm{i}(A(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}(A(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y)\\ =& \varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y)\\ &+\mathrm{i}\varphi(x+\mathrm{i}y,x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}\varphi(x-\mathrm{i}y,x-\mathrm{i}y).\end{aligned}$$

利用 $\varphi(x,x)$ 是实数容易得出 $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$, 故为对称的.

例 4.3.1 设 $\{e_j : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 的规范正交基, $A \in B(\mathbf{C}^n)$, 其中

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}e_j, \qquad k = 1,\cdots,n.$$

A 对应的是 $n \times n$ 阶方阵 (a_{kj}), 其中 $a_{kj} = (Ae_k, e_j)$.

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \qquad Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k Ae_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}e_j\right).$$

由定理 4.3.4, A 的共轭矩阵 A^* 是存在的, 并且由定义知道, 若 $A^* = (b_{kj})$, 则

$$b_{kj} = (A^*e_k, e_j) = \overline{(e_j, A^*e_k)} = \overline{(Ae_j, e_k)} = \overline{a_{kj}},$$

即 A^* 是 A 的转置共轭矩阵.

同样地, 对于可分Hilbert 空间 H, 若 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是 H 的规范正交基, $T \in B(H)$, 则 T 表现为一个无穷矩阵 $(a_{kj})_{k,j=1}^{\infty}$, 其中

$$Te_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} e_j, \qquad k \geqslant 1$$

(见例 3.3.4). 此时若 $b_{jk} = \overline{a_{kj}}$, 则与 $B = (b_{jk})$ 相应的算子是 A 的伴随算子.

例 4.3.2　设 $A : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$,

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall x \in L^2[a,b],$$

其中 $K(t,s)$ 是 $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$ 上可测且平方可积的函数.

由Hölder 不等式容易验证 A 是有界线性算子, 故 A^* 存在. 实际上,

$$A^*x(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}x(s)\mathrm{d}s, \qquad \forall x \in L^2[a,b].$$

因为由定义

$$\begin{aligned}
(x, A^*y) &= \int_a^b x(t)\overline{\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b x(t)\int_a^b K(s,t)\overline{y(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \int_a^b K(s,t)x(t)\overline{y(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right)\overline{y(t)}\mathrm{d}t \\
&= (Ax, y), \quad \forall x, y \in L^2[a,b],
\end{aligned}$$

若 $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$, 则 A 是自伴算子.

定理 4.3.5　设 H 是Hilbert 空间, $A, B \in B(H)$, 则

(1) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$.

(2) $A^{**} = A$.

(3) $(AB)^* = B^*A^*$.

(4) $||A^*||^2 = ||A||^2 = ||A^*A||$.

证明 (1) $\forall x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \Phi$,

$$\begin{aligned}((\alpha A+\beta B)x, y) &= (\alpha Ax+\beta Bx, y)\\ &= \alpha(Ax, y)+\beta(Bx, y)\\ &= \alpha(x, A^*y)+\beta(x, B^*y)\\ &= (x, (\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*)y),\end{aligned}$$

故 $(\alpha A+\beta B)^* = \overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$.

(2) $\forall x, y \in H$,

$$(A^*y, x) = \overline{(x, A^*y)} = \overline{(Ax, y)} = (y, Ax),$$

故 $A = (A^*)^* = A^{**}$.

(3) $A, B \in B(H)$, 故 $AB \in B(H)$, $(AB)^*$ 存在 $\forall x, y \in H$,

$$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y),$$

故 $(AB)^* = B^*A^*$.

(4) $\forall x, y \in H, (Ax, y) = (x, A^*y)$. 若 $Ax \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}||Ax|| &= \frac{(Ax, Ax)}{||Ax||} = \frac{1}{||Ax||}(x, A^*Ax)\\ &= \left(x, A^*\left(\frac{Ax}{||Ax||}\right)\right) \leqslant \left|\left|A^*\left(\frac{Ax}{||Ax||}\right)\right|\right| \, ||x|| \leqslant ||A^*|| \, ||x||.\end{aligned}$$

所以 $||A|| \leqslant ||A^*||$. 又由 (2), $||A^*|| \leqslant ||A^{**}|| = ||A||$, 于是 $||A^*|| = ||A||$.

上式又可以写成 $||Ax||^2 = (x, A^*Ax) \leqslant ||A^*A|| \, ||x||^2$, 故

$$||A||^2 = \sup_{||x||\leqslant 1} ||Ax||^2 \leqslant ||A^*A||.$$

显然 $||A^*A|| \leqslant ||A^*|| \, ||A|| = ||A||^2$, 故 $||A^*||^2 = ||A||^2 = ||A^*A||$.

定理 4.3.6 设 H 是Hilbert 空间, $A \in B(H)$, A^* 是 A 的伴随算子, 则

$$N(A) = R(A^*)^{\perp},$$

$$N(A^*) = R(A)^{\perp},$$

$$\overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp},$$

$$\overline{R(A^*)} = N(A)^{\perp}.$$

证明 若 $x \in N(A)$, 则 $Ax = 0$. $\forall y \in H$,

$$0 = (Ax, y) = (x, A^*y),$$

故 $x \perp R(A^*)$, $x \in R(A^*)^{\perp}$, 所以 $N(A) \subset R(A^*)^{\perp}$. 反之, $\forall x \in R(A^*)^{\perp}$, $(x, A^*y) = 0$, $\forall y \in H$, 从而

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = 0.$$

y 任意, 故 $Ax = 0$, $x \in N(A)$, $R(A^*)^{\perp} \subset N(A)$. 总之 $N(A) = R(A^*)^{\perp}$.

由此 $N(A^*) = R(A^{**})^{\perp} = R(A)^{\perp}$.

同样地由第一式知道 $N(A)^{\perp} = R(A^*)^{\perp\perp}$. 但显然 $R(A^*)^{\perp} = \overline{R(A^*)}^{\perp}$, 由 4.2 节定理4.2.3, $\overline{R(A^*)} = \overline{R(A^*)}^{\perp\perp} = R(A^*)^{\perp\perp}$, 故 $\overline{R(A^*)} = N(A)^{\perp}$, 第四式成立.

最后 $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A^{**})} = \overline{R(A)}$.

定理 4.3.7 (Lax-Milgram) 设 H 是Hilbert 空间, $\varphi : H \times H \to \Phi$ 是一 · 五线性的. 若 φ 有界并且存在 $r > 0$, 使得

$$|\varphi(x, x)| \geqslant r\, ||x||^2, \qquad \forall x \in H, \tag{4.3.9}$$

则存在 $A \in B(H)$, A 可逆, $|A^{-1}| \leqslant r^{-1}$ 并且

$$\varphi(x, y) = (x, Ay), \qquad \forall x, y \in H.$$

证明 由定理 4.3.3 知道存在 $A \in B(H)$, 使得

$$\varphi(x, y) = (Ax, y) = (x, A^*y).$$

由定理中条件, 当 $x = y$ 时

$$r\, ||x||^2 \leqslant |\varphi(x, x)| \leqslant ||Ax||\, ||x||,$$

或者

$$r\, ||x|| \leqslant ||Ax||, \qquad \forall x \in H, \tag{4.3.10}$$

这说明 A 是可逆的. 同样地还有

$$r\, ||x|| \leqslant ||A^*x||, \qquad \forall x \in H,$$

即 A^* 也是可逆的, 从而 $N(A^*)=\{0\}$. 根据定理 4.3.6 第二式, $\overline{R(A)}=H$. 又由 (4.3.9), 若 $y_n=Ax_n\to y$, 则

$$r\|x_n-x_m\|\leqslant\|Ax_n-Ax_m\|\to 0\qquad(m,n\to\infty),$$

于是 $\{x_n\}$ 是Cauchy 序列. H 完备, 不妨设 $x_n\to x_0$, 从而

$$y=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}Ax_n=Ax_0,$$

即 $y\in R(A)$. 这说明 $R(A)$ 是闭的. 于是 $R(A)=H$. A 是一一的到上的, 由逆算子定理 A^{-1} 是定义在整个 H 上的. 令 $x=A^{-1}y$, $\forall y\in H$, 则 (4.3.9) 表明

$$r\left\|A^{-1}y\right\|\leqslant\|y\|,$$

于是 $\|A^{-1}\|\leqslant r^{-1}$. 证毕.

定理 4.3.8 设 H 是Hilbert 空间, $T\in B(H)$ 是自伴的, 则

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(Tx,x)|.\tag{4.3.11}$$

证明 首先对于 $\|x\|\leqslant 1$ 有

$$|(Tx,x)|\leqslant\|Tx\|\,\|x\|\leqslant\|T\|\,\|x\|^2\leqslant\|T\|,$$

故 $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|(Tx,x)|\leqslant\|T\|$.

若记 (4.3.10) 的右端为 r, 则 $\forall x\in H$, 当 $x\neq 0$ 时

$$\left|\left(T\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\frac{x}{\|x\|}\right)\right|\leqslant r$$

或 $|(Tx,x)|\leqslant r\|x\|^2$. 由自伴性, 实际计算知道

$$\begin{aligned}&(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)\\=&2(Tx,y)+2(Ty,x)\\=&2(Tx,y)+2(y,Tx)=4\mathrm{Re}(Tx,y),\end{aligned}$$

从而

$$|\mathrm{Re}(Tx,y)|\leqslant\frac{r}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)\leqslant\frac{r}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

取 $e^{i\theta}$ 使得

$$
\begin{aligned}
|(Tx,y)| &= e^{i\theta}(Tx,y) = (T(e^{i\theta}x),y) \\
&\leqslant \frac{r}{2}\left(\left\|e^{i\theta}x\right\|^2 + \|y\|^2\right) = \frac{r}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).
\end{aligned}
$$

实际上此式关于 $\forall x,y\in H$ 成立. 若 $Tx\neq 0$, 令 $y=\dfrac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx$, 代入上式有 $\|Tx\|\leqslant r\|x\|$, 于是 $\|T\|\leqslant r$. 总之 (4.3.10) 成立.

下面是两类更广泛的算子.

定义 4.3.3　设 H 是复Hilbert 空间, $T\in B(H)$.

(1) 若 $T^*T=TT^*=I$, 则称 T 是酉算子, 这里 I 是单位算子.

(2) 若 $T^*T=TT^*$, 则称 T 是正常算子.

容易知道, 投影算子、自伴算子和酉算子都是正常算子.

定理 4.3.9　设 H 是Hilbert 空间, 则

(1) T 是酉算子当且仅当 T 是到上的并且

$$
(Tx,Ty)=(x,y),\qquad \forall x,y\in H, \tag{4.3.12}
$$

或者

$$
\|Tx\|=\|x\|,\qquad \forall x\in H. \tag{4.3.13}
$$

(2) T 是正常算子当且仅当

$$
\|Tx\|=\|T^*x\|,\qquad \forall x\in H. \tag{4.3.14}
$$

(3) $T\in B(H)$ 是正常算子当且仅当 T 有分解 $T=T_1+iT_2$, 其中 T_1, T_2 是自伴算子并且 $T_1T_2=T_2T_1$.

(4) 若 $T_n\in B(H)$ 是正常算子, $\|T_n-T\|\to 0$, 则 T 是正常算子.

证明　(1) 应用极化恒等式容易知道 (4.3.12) 与 (4.3.13) 是等价的. 由酉算子的定义, $T^*Tx=TT^*x=x$, 于是 T 和 T^* 都是到上的. 此时

$$
(x,y)=(T^*Tx,y)=(Tx,Ty),
$$

故 (4.3.11) 成立. 反过来当 (4.3.12) 成立时, $\forall x,y\in H$, $(x,y)=(T^*Tx,y)$, 于是 $T^*Tx=x$, 即 $T^*T=I$. 同样地, $TT^*=I$.

(2) 当 (4.3.14) 成立时, $\forall x \in H$, $(Tx,Tx) = (T^*x,T^*x)$, 从而 $(T^*Tx,x) = (TT^*x,x)$ 或 $((T^*T-TT^*)x,x)=0$, 再应用极化恒等式便得到 $T^*T-TT^*=0$, 即 T 是正常算子. 反过来的证明是容易的.

(3) 若 T_1,T_2 是自伴的并且 $T_1T_2=T_2T_1$, $T=T_1+\mathrm{i}T_2$, 则

$$\begin{aligned}TT^* &= (T_1+\mathrm{i}T_2)(T_1+\mathrm{i}T_2)^* \\ &= (T_1+\mathrm{i}T_2)(T_1-\mathrm{i}T_2) \\ &= (T_1-\mathrm{i}T_2)(T_1+\mathrm{i}T_2) = T^*T,\end{aligned}$$

所以 T 是正常的. 反之, 若 T 是正常的, 则

$$T_1 = \frac{1}{2}(T+T^*), \qquad T_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(T-T^*)$$

是可交换的自伴算子, 并且 $T=T_1+\mathrm{i}T_2$.

(4) 注意此时 $\|T_n^*-T^*\|\to 0$ 并且 $T_n^*T_n = T_nT_n^*$, 由此过渡到极限不难得到所要的结论.

例 4.3.3 考虑空间 $L^2[-\pi,\pi]$ 及其正交基 $\{e^{\mathrm{i}nt}: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$, 若定义 $T\in B(L^2[-\pi,\pi])$, 使得 $Te_n=e_{n+1}$, $\forall n=0,\pm1,\pm2,\cdots$(这里记 $e_n(t)=e^{\mathrm{i}nt}$), 则 T 是酉算子. 实际上为求 T^*, 只需考虑

$$(T^*e_n,e_m) = (e_n,Te_m) = (e_n,e_{m+1}) = \begin{cases} 1, & m=n-1, \\ 0, & m\neq n-1. \end{cases}$$

于是必有 $T^*e_n=e_{n-1}$, $\forall n$, 从而知道 $T^*T=TT^*=I$.

例 4.3.4 考虑复平面上的有界闭集 Ω, 记 Ω 上的 Borel 测度为 μ, $L^2(\Omega,\mu)$ 是 Ω 上定义的关于 μ 可测并且平方可积的函数全体, 算子 $T: L^2(\Omega,\mu)\to L^2(\Omega,\mu)$ 定义为

$$(T\xi)(z) = z\xi(z),$$

则 T 是正常的. 为求 T^*, 只需知道 $\forall \eta\in L^2(\Omega,\mu)$,

$$(\eta,T^*\xi) = (T\eta,\xi) = \int_\Omega z\eta(z)\overline{\xi(z)}\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \eta(z)\overline{\overline{z}\xi(z)}\mathrm{d}\mu,$$

η 是任意的, 故必有 $T^*\xi=\overline{z}\xi(z)$. 于是

$$(TT^*\xi)(z) = T(\overline{z}\xi(z)) = |z|\xi(z).$$

另一方面,

$$(TT^*\xi)(z) = T(\bar{z}\xi(z)) = |z|^2\xi(z),$$
$$(T^*T\xi)(z) = T^*(z\xi(z)) = |z|^2\xi(z).$$

所以 $T^*T = TT^*$, T 是正常算子.

习　题　4

1. 证明平行四边形公式成立当且仅当下面两条件之一成立：

(1) $||x+y||^2 + ||x-y||^2 \leqslant 2(||x||^2 + ||y||^2), \quad \forall x, y \in H.$

(2) $||x+y||^2 + ||x-y||^2 \geqslant 2(||x||^2 + ||y||^2), \quad \forall x, y \in H.$

2. 设 H 是内积空间, $x, y_i \in H (i \geqslant 1)$, 则

(1) $x \perp \overline{\text{span}}\{y_i : i \geqslant 1\}$ 当且仅当 $x \perp y_i \ (i \geqslant 1)$.

(2) $x \perp \overline{\text{co}}\{y_i : i \geqslant 1\}$ 当且仅当 $x \perp y_i \ (i \geqslant 1)$.

3. 对于内积空间 H, 下述条件等价：

(1) $x \perp y$.

(2) $||x + \alpha y|| \geqslant ||x||, \forall \alpha \in \Phi$.

(3) $||x + \alpha y|| = ||x - \alpha y||, \forall \alpha \in \Phi$.

(4) 若 H 还是实空间, $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

4. 设 H 是Hilbert 空间, $\{x_n\}$ 是 H 中的正交集, 则以下三条等价：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛;　　(2) $\forall y \in H, \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n, y)$收敛;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2$ 收敛.

5. 设 H 是内积空间, $\{e_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是 H 中的规范正交集, $x \in H$. 则

$$F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|$$

达到极小值当且仅当 $\alpha_i = (x, e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

6. 利用投影定理求实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{m} \left(x_0^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} t_j \right)^2$$

达到极小, 其中 $(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}) (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是已知的实数组.

7. 设 H 是Hilbert 空间, $\{e_n\}$, $\{e'_n\}$ 都是 H 中的规范正交集并且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left|\left|e_i - e'_i\right|\right|^2 < 1$, 证明若 $\{e_n\}$ 是完备正交集, 则 $\{e'_n\}$ 也是.

8. 验证 $\psi_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)$ 是 $L^2(-\infty, \infty)$ 上的正交基, 其中 $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \dfrac{\mathrm{d}^n e^{-t^2}}{\mathrm{d}t^n}$ 是 Hermite 多项式.

9. 验证 $G_n(t)=\frac{1}{n!}e^{\frac{t}{2}}L_n(t)$ 是 $L^2(0,\infty)$ 上的正交基, 其中 $L_n(t)=e^t\frac{\mathrm{d}^nt^ne^{-t}}{\mathrm{d}t^n}$ 是 Laguerre 函数系.

10. 设 $D=\{|z|<1\}$ 是复平面中的单位圆, $H^2(D)$ 的定义如习题 1 第 16 题, 验证 $e_n(z)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}z^{n-1}(n\geqslant 1)$ 是 $H^2(D)$ 的正交基.

11. 设 H 是Hilbert 空间, $\{u_n\}$ 是 H 中一列单位向量, 满足

$$a^2=\sum_{i\neq j}|(u_i,u_j)|^2<\infty.$$

则对于任一列标量 $\{\alpha_i\}$,

$$(1-a)\sum_{i\in I}|\alpha_i|^2\leqslant\left\|\sum_{i\in I}\alpha_iu_i\right\|^2\leqslant(1+a)\sum_{i\in I}|\alpha_i|^2,$$

其中 $I\subset N$ 是任一有限集. 由此证明 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_iu_i$ 依 H 中范数收敛当且仅当 $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$.

12. 设 $f\in L^2[a,b]$(实空间), 若 $\int_a^b f(t)t^n\mathrm{d}t=0,\ n\geqslant 0$, 则 $f(t)=0$, a.e..

13. 设 $f\in L^2[-\pi,\pi]$(复空间), 若 $\int_{\pi}^{\pi} f(t)e^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t=0,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 则 $f(t)=0$, a.e..

14. 举例说明定理 4.1.6 的 (4) 与 (6) 不是等价的, 假若 H 不是完备内积空间.

15. 若 H 是内积空间, $M,N\subset H$.

(1) 若 $M\perp N$, 则 $M\subset N^{\perp}$, $N\subset M^{\perp}$.

(2) 若 $M\subset N$, 则 $M^{\perp}\supset N^{\perp}$.

(3) $M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$.

16. 若 $E\subset H$ 是线性子空间并且 $\forall x\in H$, x 在 E 上的投影存在, 则 E 是闭的.

17. 若 $E\subset H$ 是线性子空间, 则 E 在 H 中稠密当且仅当 $\forall x\in H$, $x\perp E$, 则 $x=0$.

18. 若 P_1,P_2 是投影算子, 则 P_1P_2 是投影算子当且仅当 $P_1P_2=P_2P_1$.

19. 设 E 是 H 的闭线性子空间, $x\in H$, 则

$$d(x,E)=\sup\{|(x,y)|:\|y\|=1,y\in E^{\perp}\}.$$

以下设 H 是复Hilbert 空间.

20. 设 P_n 是 H 上的投影算子序列, 并且 $P_n\leqslant P_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明存在投影算子 P, 使得 $P_n\to P$点点成立.

21. 证明:

(1) 若 T_1,T_2 是自伴算子, 则 T_1+T_2 也是. 若 $T_1T_2=T_2T_1$, 则 T_1T_2 也是.

(2) 若 T 是自伴算子, k 为实数, 则 kT 是自伴算子.

(3) 若 T_n 是自伴算子并且 $\|T_n-T\|\to 0$, 则 T 是自伴算子.

(4) T 是自伴算子, 则 $N(T)=R(T)^{\perp}$.

22. 设 $E \subset H$ 是闭凸集, $x \in H$, 为了 x_0 是 x 关于 E 的最佳逼近元, 必须并且只须

$$\mathrm{Re}(x - x_0, y - x_0) \leqslant 0, \qquad \forall y \in E.$$

23. 设 $J \in B(H)$ 是自伴算子, 若存在 $c > 0$, 使得 $\forall x \in H, (Jx, x) \geqslant c(x, x)$, 则 $[x, y] = (Jx, y)$ 是 H 上的内积, 并且 $(H, [\cdot, \cdot])$ 是Hilbert 空间.

24. 设 $A \in B(H)$, 证明 $A + A^* = 0$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(Ax, x) = 0, \forall x \in H$.

25. 若 $T \in B(H)$ 并且 $(Tx, x) = 0, \forall x \in H$, 则 $T = 0$.

26. 证明 $T : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$, $(Tx)(t) = tx(t)$ 是自伴算子.

27. 设 $T : l_2 \to l_2$, $Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots)$, $\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_2$, 则 T 是自伴算子当且仅当 λ_n 是实数 $(n \geqslant 1)$.

28. 设 $\{e_n, n \geqslant 1\}$ 是 H 中的规范正交集, $\lambda_n \in \Phi$, 定义 $T : H \to H, Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$. 证明若 λ_n 是有界数列, 则 $T \in B(H)$, T 是自伴算子当且仅当 λ_n 是实数.

29. 直接证明可分Hilbert 空间上的每个紧算子是一列有界的有限秩算子的极限.

30. 证明 $T : L_2[0, \infty) \to L_2[0, \infty)$, $(Tx)(t) = x(t + a)$ $(a > 0)$ 是酉算子.

31. 证明空间 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 上的 Fourier 变换

$$\Im x(s) = \int_{\mathbf{R}^n}^{-2\pi st} x(t) e dt, \qquad \forall x \in L_2(\mathbf{R}^n)$$

是酉算子.

32. 设 U 是酉算子, 则当 T 是投影算子、自伴算子、酉算子、正常算子时, $U^{-1}TU$ 也是.

33. 设 $T \in B(H)$, 证明:

(1) $T + T^*$ 是正常算子.

(2) 若 T 是正常算子, 则 $\forall \lambda \in C$, $\lambda T, I + \lambda T$ 是正常算子.

(3) 若 T, S 是正常算子并且 T 与 S^*, S 与 T^* 可交换, 则 TS 是正常的.

第 5 章　有界线性算子的谱理论

线性算子的谱理论是与解各种类型的算子方程紧密联系的，它起源于代数方程、线性方程组、积分方程和微分方程的特征值问题. 实际上在泛函分析产生的早期, Volterra、Fredholm、Hilbert 等人就研究过这样的问题, 同时它也是泛函分析中经久不衰的研究课题. 本章首先讨论算子的正则性和谱的基本性质, 然后着重叙述 Riesz-Schauder 关于紧算子的谱论和Hilbert 空间上自伴算子的谱论, 最后介绍谱系和谱分解问题.

5.1　逆算子与谱

设 X 是线性赋范空间, $B(X)$ 是 X 上全体有界线性算子构成的空间, 我们已经知道 $B(X)$ 是线性赋范空间. 实际上, 在 $B(X)$ 中还可以引进另一种运算 ——算子的乘法.

对于两个算子 $A, B \in B(X)$, 规定

$$AB(x) = A(B(x)), \qquad \forall x \in X.$$

这种运算满足

$$\begin{aligned} &A(BC) = (AB)C, \\ &A(B+C) = AB + AC, \\ &(A+B)C = AC + BC, \\ &k(AB) = (kA)B = A(kB), \qquad k \in \Phi. \end{aligned}$$

以 I 表示单位算子, 则 $AI = IA = A$. 若 $\|\cdot\|$ 是 $B(X)$ 上的范数, 则

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|, \qquad \forall A, B \in B(X).$$

由于 $B(X)$ 中能够引进乘法运算并且具有以上性质, 我们称 $B(X)$ 是一个赋范代数, 称 I 是单位元. 若 $B(X)$ 还是完备的, 则称为 Banach 代数.

Banach 代数的概念也可以完全公理式地加以定义. 不过, 本质上说来, 任何一个 Banach 代数都可以看成某个空间上的算子代数.

前面几章我们已经接触过逆算子的概念, 并且知道当 A 是线性算子时, 若 A^{-1} 存在, 则 A^{-1} 也是线性算子. 现在我们将从 $B(X)$ 中元素的角度进一步考察逆算子.

定义 5.1.1　称 $A \in B(X)$ 是正则算子, 若 A 是到上的一一的, 并且 A^{-1} 是有界算子.

定理 5.1.1　设 X 是Banach 空间, $A \in B(X)$, 则以下条件等价:

(1) A 是正则算子.

(2) 存在 $B \in B(X)$, $AB = BA = I$. 此时 B 即是 A^{-1}.

(3) A 是到上的并且存在 $a > 0$, $||Ax|| \geqslant a||x||$, $\forall x \in X$.

(4) A 是一一的到上的.

证明　(1)⇒(2). 若 A 是正则算子, A^{-1} 存在并且 $A^{-1} \in B(X)$, 取 $B = A^{-1}$, 则 $AB = BA = I$.

(2)⇒(3). 实际上 $\forall x \in X$, 令 $y = Ax$. 由 $BA = I$ 知道 $By = BAx = x$, 于是

$$||x|| = ||By|| \leqslant ||B||\ ||y|| = ||B||\ ||Ax||.$$

又由 $1 = ||I|| \leqslant ||A||\ ||B||$ 知道 $||B|| \neq 0$. 取 $||B||^{-1} = a$, 则从上式得到

$$||Ax|| \geqslant \frac{1}{||B||}||x|| = a||x||, \qquad \forall x \in X.$$

由 $AB = I$ 知道 A 是到上的.

(3)⇒(4). 若 $Ax = 0$, 则 $x = 0$, 故 $N(A) = \{0\}$.

(4)⇒(1). 由 $N(A) = \{0\}$ 知道 A 是一一的, 于是 A^{-1} 存在. 又 A 到上, 根据逆算子定理知道 $A^{-1} \in B(X)$.

定理 5.1.2　设 $A, B \in B(X)$.

(1) 若 A 是正则算子, 则 A^{-1} 是正则算子并且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 若 A, B 是正则算子, 则 AB 是正则算子并且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(3) 若 A 是正则算子, 则 A^* 是正则算子并且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证明　(1) A 正则, 故 $A^{-1} \in B(X)$ 并且 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. 由于 $A \in B(X)$, 从定理 5.1.1(2) 知 A^{-1} 正则, 并且 $A = (A^{-1})^{-1}$.

(2) 由正则性的定义, $A^{-1}, B^{-1} \in B(X)$ 并且

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I, \qquad BB^{-1} = B^{-1}B = I.$$

于是

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I,$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

故 AB 正则并且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3) 由 $A^{-1} \in B(X)$, 故 $(A^{-1})^*$ 存在, 并且 $(A^{-1})^* \in B(X^*)$. 又 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_X$, 于是对两边取共轭得到

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = I_X^* = I_{X^*}.$$

故 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

以下我们就复空间进行讨论. 这是为了充分应用复解析函数的优越性质.

注意对于 Banach 代数 $B(X)$, 关于算子 A 的多项式

$$a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n$$

总是有意义的. 同时算子幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nA^n (A^0 = I)$ 的收敛性乃至算子函数 $f(A)$ 的解析性都可以在一定意义上加以定义. 例如, 表达式

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \qquad \sin A = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

等在算子范数意义下收敛, 因此它们都代表 $B(X)$ 中确定的元素. 下面定理中出现的多项式和幂级数也是如此.

定理 5.1.3 (von Neumann) 设 X 是Banach 空间, $A \in B(X)$, $\lambda \in C$. 若 $||A|| < |\lambda|$, 则 $\lambda I - A$ 是正则算子.

证明 令 $B_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{A^i}{\lambda^{i+1}}$, 不妨设 $\frac{||A||}{|\lambda|} = \alpha$, 则 $0 \leqslant \alpha < 1$, 并且

$$||B_n|| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{||A^i||}{|\lambda|^{i+1}} \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{||A||^i}{|\lambda|^{i+1}} \leqslant \frac{1}{|\lambda|(1-\alpha)} = \frac{1}{|\lambda| - ||A||}.$$

于是 $B_n \in B(X)$. 对于每个 $x \in X$, 若 $m > n$, 则

$$||B_mx - B_nx|| \leqslant \left|\left| \sum_{i=n+1}^{m} \frac{A^i}{\lambda^{i+1}} x \right|\right| \leqslant \frac{\alpha^{n+1}}{|\lambda| - ||A||} ||x|| \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

$\{B_nx\}$ 是Cauchy 序列, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} B_nx$ 存在. 由 Banach-Steinhaus 定理, 存在 $B \in B(X)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} B_nx = Bx, \qquad \forall x \in X. \tag{5.1.1}$$

又 $A \in B(X)$, 故 $\lambda I - A \in B(X)$. 对于每个 $x \in X$,

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)Bx &= \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)B_n x \\ &= \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{A^i}{\lambda^{i+1}}\right)x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{A^i}{\lambda^i} - \sum_{i=0}^{n}\frac{A^{i+1}}{\lambda^{i+1}}\right)x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\right)x = Ix,\end{aligned}$$

即 $(\lambda I - A)B = I$.

另一方面, 在 (5.1.1) 中, 以 $(\lambda I - A)x$ 代替 x, 则

$$\begin{aligned}B(\lambda I - A)x &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{A^i}{\lambda^{i+1}}\right)(\lambda I - A)x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{A^i}{\lambda^i} - \sum_{i=0}^{n}\frac{A^{i+1}}{\lambda^{i+1}}\right)x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\right)x = Ix,\end{aligned}$$

即 $B(\lambda I - A) = I$.

由定理 3.1.1(2) 知, $\lambda I - A$ 是正则算子并且 $B = (\lambda I - A)^{-1}$. 换句话说, 在算子的点点收敛 (实际上也可证明在算子范数收敛) 意义下

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{5.1.2}$$

由 Banach-Steinhaus 定理的结论还知道

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \|B\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\|B_n\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

定理 5.1.3 的结论使得算子 $\lambda I - A$ 的正则性与复平面上的点联系起来, 由此我们可以将整个复平面上的点分为若干类型, 具体地说有如下定义.

定义 5.1.2　设 X 是复的线性赋范空间, $A: X \to X$ 是线性算子, $\lambda \in \mathbf{C}$.

(1) 若 $\lambda I - A$ 是正则算子, 则称 λ 是 A 的正则点. A 的正则点的全体记为 $\rho(A)$, 称 $\rho(A)$ 是 A 的正则集.

(2) 若 $\lambda I - A$ 不是正则算子, 则称 λ 是 A 的谱点, A 的谱点的全体记为 $\sigma(A)$, 称 $\sigma(A)$ 是 A 的谱集.

(3) 特别地, 若 $\lambda I - A$ 不是可逆的 (即 $\lambda I - A$ 不是一一的), 称 λ 为 A 的特征值, A 的特征值的全体记为 $\sigma_p(A)$.

(4) 若 $\lambda I - A$ 可逆, 但不是到上的, 而值空间 $R(\lambda I - A)$ 在 X 中稠密, 则称 λ 为 A 的连续谱, 连续谱的全体记为 $\sigma_c(A)$.

(5) 若 $\lambda I - A$ 可逆, 而值空间 $R(\lambda I - A)$ 不在 X 中稠密, 则称 λ 为 A 的剩余谱, 其全体记为 $\sigma_r(A)$.

$\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$ 分别称为 A 的点谱、连续谱和剩余谱集. 此外, 若 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, 则称 $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ 是 A 的预解式.

明显地, 若 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 则存在 $x \neq 0$, 使得 $(\lambda I - A)x = 0$, 此时称 x 是 A 的相应于 λ 的特征向量. 称 $N(\lambda I - A)$ 是 A 的相应于 λ 的特征向量空间.

由定义还知道复平面 $\mathbf{C} = \rho(A) \bigcup \sigma(A)$, 并且 $\rho(A) \bigcap \sigma(A) = \varnothing$. 另外 $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ 互不相交并且

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \bigcup \sigma_c(A) \bigcup \sigma_r(A).$$

算子谱的概念和算子方程的解的状况有直接联系. 算子方程解的存在性、唯一性乃至解关于所给初始条件的连续依赖性都可以由谱来决定.

定理 5.1.4 设 X 是Banach 空间, $A \in B(X)$.

(1) $\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当非齐次方程

$$(\lambda I - A)x = y \tag{5.1.3}$$

关于任何 $y \in X$ 的解存在、唯一. 此时存在常数 $c > 0$, 使得 $\|x\| \leqslant c\|y\|$, 其中 x 是与 y 相应的 (5.1.3) 的解.

(2) $\lambda \in \sigma_p(A)$ 当且仅当齐次方程

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{5.1.4}$$

有非零解.

(3) $\lambda \in \sigma_c(A) \bigcup \sigma_r(A)$ 当且仅当齐次方程 (5.1.4) 有唯一零解而相应的非齐次方程 (5.1.3) 不是对于每个 $y \in X$ 都有解.

证明 (1) 若 $\lambda \in \rho(A)$, 则 $(\lambda I - A)^{-1} \in B(X)$ 并且

$$(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A) = I,$$

于是

$$x = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)^{-1}y,$$

并且

$$\|x\| = \|(\lambda I - A)^{-1}y\| \leqslant \|(\lambda I - A)^{-1}\| \, \|y\|.$$

由于当 $y=0$ 时 $x=0$, 故解是唯一的.

反之, 若所说的条件成立, 当 $y=0$ 时, $x=0$, 即方程 $(\lambda I - A)x = 0$ 有唯一的 0 解或 $N(\lambda I - A)x = \{0\}$. $\lambda I - A$ 是一一映射, 故 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在. $(\lambda I - A)x = y$ 对于每个 y 有解, 故 $\lambda I - A$ 是到上的. 由定理 5.1.1(4) 知 $\lambda I - A$ 是正则算子, 即 $\lambda \in \rho(A)$.

(2) 若 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 则 $\lambda I - A$ 不可逆 (不是一一的), 于是存在 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, $(\lambda I - A)x_1 = (\lambda I - A)x_2$, 从而 $(\lambda I - A)(x_1 - x_2) = 0$, 即齐次方程有非零解. 反之, 若 $x \in X, x \neq 0, (\lambda I - A)x = 0$, 但 $(\lambda I - A)0 = 0$, 故 $\lambda I - A$ 不是一一的, $\lambda \in \sigma_p(A)$.

(3) 齐次方程只有零解对应于算子 $\lambda I - A$ 是一一的. 不是对于每个 $y \in X$ 有解对应于 $\lambda I - A$ 不是到上的. 故 (3) 成立.

定理 5.1.5　设 X 是Banach 空间, $A \in B(X)$. 则

(1) $\rho(A)$ 是开集;

(2) $\sigma(A)$ 是紧集.

证明　(1) 若有 $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\lambda_0 I - A$ 是正则算子. 我们证明只要 $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|}$, 则 $\lambda I - A$ 是正则算子, 从而 $\lambda \in \rho(A)$. 于是 $\rho(A)$ 是开集.

实际上, 记 $\theta = \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \, |\lambda - \lambda_0|$, 则 $0 \leqslant \theta < 1$, 考虑序列

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\lambda_0 I - A)^{-(i+1)} (\lambda - \lambda_0)^i,$$

其中 $(\lambda_0 I - A)^{-(i+1)} = [(\lambda_0 I - A)^{-1}]^{i+1}$. 若 $m > n$, 则

$$\begin{aligned} \|B_m - B_n\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^{m} (-1)^i (\lambda_0 I - A)^{-(i+1)} (\lambda - \lambda_0)^i \right\| \\ &\leqslant \sum_{i=n+1}^{m} \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^{i+1} |(\lambda - \lambda_0)^i| \\ &= \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \sum_{i=n+1}^{m} \theta^i \to 0 \qquad (m, n \to \infty), \end{aligned}$$

所以 $\{B_n\}$ 是 $B(X)$ 中的Cauchy 序列. $B(X)$ 是Banach 空间, 故存在 $B \in B(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$ 或者

$$B = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\lambda_0 I - A)^{-(i+1)} (\lambda - \lambda_0)^i. \tag{5.1.5}$$

现在

$$\|(\lambda I - A)B - (\lambda I - A)B_n\| \leqslant \|\lambda I - A\| \, \|B_n - B\| \to \infty,$$

所以

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)B &= \lim_{n\to\infty} (\lambda I - A)B_n \\
&= \lim_{n\to\infty} (\lambda I - A) \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\lambda_0 I - A)^{-(i+1)} (\lambda - \lambda_0)^i \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} [(\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A)] \\
&\quad \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\lambda_0 I - A)^{-(i+1)} (\lambda - \lambda_0)^i \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} [I - (-1)^{n+1} (\lambda_0 I - A)^{-(n+1)} (\lambda - \lambda_0)^{n+1}] = I.
\end{aligned}$$

同样地

$$B(\lambda I - A) = \lim_{n\to\infty} B_n(\lambda I - A) = I.$$

由定理 5.1.1(2) 知, $\lambda I - A$ 是正则算子, $\lambda \in \rho(A)$.

(2) 由 von Neumann 定理, 当 $\|A\| < |\lambda|$ 时, $\lambda I - A$ 是正则算子, 故 $\sigma(A)$ 是平面 $\mathbf{C}$ 中的有界集. 又 $\sigma(A) = \mathbf{C} \backslash \rho(A)$ 是闭集, 所以 $\sigma(A)$ 是 $\mathbf{C}$ 中的紧集.

定理 5.1.6 (Gelfand-Mazur) 设 X 是非零 Banach 空间, $A \in B(X)$, 则 $\sigma(A) \neq \varnothing$.

证明 注意 $\forall \lambda \in \rho(A)$, $f \in B(X)^*$, 则 $F(\lambda) = f((\lambda I - A)^{-1})$ 是复值函数. 由定理 5.1.5 及 f 的连续性,

$$F(\lambda) = f(B) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i f((\lambda_0 I - A)^{-(i+1)}) (\lambda - \lambda_0)^i \tag{5.1.6}$$

至少在 $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|}$ 时成立.

于是, $F(\lambda)$ 是 $\rho(A)$ 中的解析函数. 若 $\sigma(A) = \varnothing$, 则 $F(\lambda)$ 在整个复平面 $\mathbf{C}$ 上解析. 又根据 von Neumann 定理, 当 $|\lambda| > \|A\|$ 时,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| < \frac{1}{|\lambda| - \|A\|},$$

故

$$|f((\lambda I - A)^{-1})| \leqslant \frac{\|f\|}{|\lambda| - \|A\|} \to 0 \qquad (|\lambda| \to \infty). \tag{5.1.7}$$

$F(\lambda)$ 在 $\mathbf{C}$ 上有界. 根据 Liouville 定理, $F(\lambda)$ 只能是常数. 由 (5.1.7) 必有 $F(\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, 特别地 $F(0) = 0$. 以上分析对于任何 $f \in B(X)^*$ 都成立.

由于 X 是非零空间, $B(X)$ 是非零Banach 空间, 从 $\sigma(A)=\varnothing$ 得知 $0\in\rho(A)$, 从而 $A^{-1}\in B(X)$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $f\in B(X)^*$ 使得 $f(A^{-1})=\|A^{-1}\|\neq 0$. 若 F 是与 f 相应的解析函数, 将 $\lambda=0$ 代入 $F(\lambda)$ 在 0点的展开式便得到 $F(0)=-f(A^{-1})\neq 0$, 这与 $F(\lambda)\equiv 0$ 矛盾. 故 $\sigma(A)\neq\varnothing$.

定义 5.1.3　称 $r(A)=\max\limits_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$ 为算子 A 的谱半径.

从几何观点看,算子 A 的谱半径就是复平面中以原点为中心, 包含 $\sigma(A)$ 的最小圆盘的半径.

定理 5.1.7 (Gelfand)　设 X 是Banach 空间, $A\in B(X)$, 则

$$r(A)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}. \tag{5.1.8}$$

证明　(1) 首先我们证明右端极限存在并且等于 $\inf\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{\|A^n\|}$. 为简便计, 令 $a=\inf\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{\|A^n\|}$. 显然地

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\geqslant\inf_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{\|A^n\|}=a. \tag{5.1.9}$$

另一方面, $\forall\varepsilon>0$, 存在 n_0, 使得 $\sqrt[n_0]{\|A^{n_0}\|}<a+\varepsilon$. 当 $n\geqslant n_0$ 时, 记 $n=kn_0+s$, $0\leqslant s<n_0$, 则

$$\|A^n\|=\|A^{kn_0+s}\|\leqslant\|A^{kn_0}\|\,\|A^s\|\leqslant\|A^{n_0}\|^k\|A\|^s,$$

于是

$$\sqrt[n]{\|A^n\|}\leqslant\|A^{n_0}\|^{\frac{k}{n}}\|A\|^{\frac{s}{n}}<(a+\varepsilon)^{\frac{kn_0}{n}}\|A\|^{\frac{s}{n}}.$$

令 $n\to\infty$, 则 $\dfrac{s}{n}\to 0$, $\dfrac{kn_0}{n}\to 1$, 从而

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\leqslant a+\varepsilon.$$

ε 是任意的, 故 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\leqslant a$.

总之, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}=a=\inf\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{\|A^n\|}$.

(2) 若 $\lambda\in\mathbf{C}, |\lambda|>a$, 则存在 n_0 和 $\varepsilon>0$, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时, $\sqrt[n]{\|A^n\|}<a+\varepsilon<|\lambda|$. 考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}},$$

由于

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left\|\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\right\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\|A^n\|}{|\lambda|^n}\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{a+\varepsilon}{|\lambda|}\right)^n<\infty,$$

故存在 $B \in B(X)$,

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{5.1.10}$$

用类似于定理 5.1.5 的方法不难验证, $(\lambda I - A)B = B(\lambda I - A) = I$, 从而 $B = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$. 这说明 $r(A) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$, 并且

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{5.1.11}$$

(3) 由 (5.1.11), 当 $|\lambda| > a$ 并且 $f \in B(X)^*$ 时,

$$f((\lambda I - A)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}. \tag{5.1.12}$$

于是 $f((\lambda I - A)^{-1})$ 在区域 $\{\lambda : |\lambda| > a\}$ 中解析. 但由 (2),

$$\{\lambda : |\lambda| > a\} \subset \{\lambda : |\lambda| > r(A)\} \subset \rho(A).$$

根据 Laurent 展开式的唯一性, (5.1.12) 即 $f((\lambda I - A)^{-1})$ 在 $\{\lambda : |\lambda| > r(A)\}$ 上的 Laurent 展开式. 由 Laurent 级数的性质, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f(A^n)|}{(r(A)+\varepsilon)^{n+1}} < \infty. \tag{5.1.13}$$

记 $B_n = \dfrac{A^n}{(r(A)+\varepsilon)^n}$, 则 $B_n \in B(X)$. (5.1.13) 说明 $\forall f \in B(X)^*$, $|f(B_n)|$ 有界. 由共鸣定理, 存在 M, 使得 $\|B_n\| \leqslant M < \infty$, 所以 $\|A^n\| \leqslant (r(A)+\varepsilon)^n M$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A) + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ 是任意的, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant r(A)$.

总之, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$.

例 5.1.1 设 $A : \Phi^n \to \Phi^n$ 是线性算子, A 对应于矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$. 对应于 $\lambda \in \mathbf{C}$, 要么行列式

$$\det(\lambda I - A) \neq 0,$$

此时方程 $(\lambda I - A)x = y$ 对于任意 $y \in \Phi^n$ 有唯一解, 从而 $\lambda \in \rho(A)$. 要么行列式

$$\det(\lambda I - A) = 0,$$

则方程 $(\lambda I - A)x = 0$ 有非零解. 总之, 有限维空间上的线性算子仅有点谱. 记 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 是其点谱全体, 则 $r(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} |\lambda_i|$.

例 5.1.2 设 H 是Hilbert 空间, $T \in B(H)$ 是酉算子, 则

$$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}.$$

实际上, 由于 T 满足 $\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in H$, 所以 $\|T\| = 1$. 由定理 5.1.3 知道 $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant 1\}$.

若 $|\lambda| < 1$, 则

$$\|(T - \lambda I)x\| \geqslant \|Tx\| - |\lambda|\,\|x\| = (1 - |\lambda|)\|x\|,$$

由此不难知道 $\lambda I - T$ 是一一的, 并且 $R(T - \lambda I)$ 是闭的. 同样地, T^* 也是酉算子, 并且 $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$, 于是

$$\|(T^* - \overline{\lambda} I)x\| \geqslant \|T^* x\| - |\overline{\lambda}|\,\|x\| = (1 - |\lambda|)\|x\|.$$

所以 $T^* - \overline{\lambda} I$ 也是一一的, 即 $N(T^* - \overline{\lambda} I) = \{0\}$. 由定理 4.3.6, $\lambda I - T$ 是到上的, 从而 $\lambda \in \rho(T)$. 这说明 $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

例 5.1.3 (左移算子) 考虑算子 $T : l^2 \to l^2$,

$$T(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots), \qquad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2.$$

容易计算出 $\|T\| = 1$, 所以 $\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant 1\}$.

$\forall \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| < 1$, 若令 $x_0 = (1, \lambda, \lambda^2, \cdots)$, 则 $Tx_0 = (\lambda, \lambda^2, \cdots) \in l^2$, 从而 $Tx_0 = \lambda x_0$ 或者 $(\lambda I - T)x_0 = 0$. 由于 $x_0 \neq 0$, 所以 $\lambda \in \sigma_p(T)$. 于是

$$\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(T) \subset \sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant 1\}.$$

$\sigma(T)$ 是闭集, 故 $\sigma(T) = \{\lambda : |\lambda| \leqslant 1\}$.

现设 $|\lambda| = 1$, 若

$$(\lambda I - T)x = (\lambda x_1 - x_2, \lambda x_2 - x_3, \cdots) = 0,$$

则

$$x_2 = \lambda x_1, x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1, \cdots, x_n = \lambda^{n-1} x_1, \cdots.$$

当 $x_1 \neq 0$ 时, 明显地 $x \overline{\in} l^2$, 于是只有 $x_1 = 0$, 从而 $x = 0$. 这说明 $(\lambda I - T)$ 是一一的, 故 $\lambda \overline{\in} \sigma_p(T)$.

$\forall y \in l^2$ 和 $\varepsilon > 0$, 取 $y' = (y_1, \cdots, y_n, 0, \cdots)$ 使得 $\|y - y'\|_2 < \varepsilon$, 此时令

$$x_1 = 0,\ x_2 = -y_1, \cdots, x_{n+1} = -(y_n + \lambda y_{n-1} + \cdots + \lambda^{n-1} y_1),$$

$x = (x_1, \cdots, x_{n+1}, 0, \cdots)$, 计算表明 $(\lambda I - T)x = y'$, 这说明 $R(\lambda I - T)$ 在 l^2 中稠密, 所以 $\lambda \in \sigma_c(T)$.

总之

$$\sigma_p(T) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}, \qquad \sigma_c(T) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}.$$

例 5.1.4 考虑复空间 $\mathbf{C}[a,b]$, 其中 a, b 有限, 定义

$$T : \mathbf{C}[a,b] \to \mathbf{C}[a,b], (Tx)(t) = tx(t), \forall x \in \mathbf{C}[a,b],$$

易知 T 为有界线性算子.

$\forall \lambda \in \mathbf{C}$, 则 $(\lambda I - T)x = (\lambda - t)x$, 当 $(\lambda I - T)x = 0$ 时, 必须 $x = 0$, 故 $(\lambda I - T)$ 是一一映射. 于是 $\sigma_p(T) = \varnothing$.

若 $\lambda \overline{\in} [a,b]$, $\forall \alpha \in \mathbf{C}[a,b]$, 取 $x(t) = \dfrac{\alpha(t)}{\lambda - t}$, 则 $x \in \mathbf{C}[a,b]$. 实际上

$$\|x\| \leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \frac{1}{\lambda - t} \right| \|\alpha\|.$$

此时, $(\lambda I - T)x = \alpha$, 所以 $\lambda I - T$ 是到上的, $\lambda \in \rho(T)$.

若 $\lambda \in [a,b]$, $\lambda I - T$ 仍然是一一的. 我们证明 $R(\lambda I - T)$ 不在 $\mathbf{C}[a,b]$ 中稠密, 从而 $\sigma(T) = \sigma_r(T) = [a,b]$.

由于 $(\lambda I - T)x(t) = (\lambda - t)x(t)$, 故 $R(\lambda I - T)$ 中每个元素在 λ点的值为 0. 若 $y \in \mathbf{C}[a,b], |y(\lambda)| > 2^{-1}$, 则

$$\|x - y\| \geqslant |x(\lambda) - y(\lambda)| > 2^{-1}, \quad \forall x \in R(\lambda I - T).$$

这说明 $y \overline{\in} \overline{R(\lambda I - T)}$.

有意思的是同是这一算子, 如果所定义的空间改变了, 谱集的情况也会跟着改变. 见习题 5 第 11 题.

定理 5.1.8 设 X 是复空间, $A \in B(X)$, $\lambda, \mu \in \rho(A)$, 则预解式满足

(1) $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$.

(2) 若 $B \in B(X)$, $AB = BA$, 则 $BR(\lambda, A) = R(\lambda, A)B$.

(3) $R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$.

证明 (1) λ, μ 是正则点, 故

$$\begin{aligned}R(\lambda,A)-R(\mu,A)&=(\lambda I-A)^{-1}-(\mu I-A)^{-1}\\&=(\lambda I-A)^{-1}(\mu I-A)(\mu I-A)^{-1}\\&\quad-(\lambda I-A)^{-1}(\lambda I-A)(\mu I-A)^{-1}\\&=(\lambda I-A)^{-1}((\mu I-A)-(\lambda I-A))(\mu I-A)^{-1}\\&=(\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A).\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}BR(\lambda,A)&=(\lambda I-A)^{-1}(\lambda I-A)B(\lambda I-A)^{-1}\\&=(\lambda I-A)^{-1}B(\lambda I-A)(\lambda I-A)^{-1}\\&=R(\lambda,A)B.\end{aligned}$$

(3) 由 $(\lambda I-A)R(\lambda,A)=R(\lambda,A)(\lambda I-A)$ 知道 $AR(\lambda,A)=R(\lambda,A)A$, 将 (2) 中的 B 当作 $R(\lambda,A)$, 即得出所要的结论.

定理 5.1.9 (谱映射定理) 设 X 是复空间, $A\in B(X)$. 若 $p(\lambda)$ 是复变量 λ 的 n 次多项式, 则

$$\sigma(p(A))=p(\sigma(A)), \tag{5.1.14}$$

其中 $p(A)$ 是将 λ 换为 A 时相应的算子多项式, 而

$$p(\sigma(A))=\{p(\lambda):\lambda\in\sigma(A)\}.$$

证明 若 $\lambda\in\sigma(A)$, 不妨记

$$p(\lambda)=a_n\lambda^n+\cdots+a_1\lambda+a_0\qquad(a_n\neq 0),$$

则有 $p(\lambda)I-p(A)=(\lambda I-A)Q(\lambda,A)$, 其中 $Q(\lambda,A)$ 是 A 的多项式, 从而是一个有界线性算子. 假若 $p(\lambda)I-p(A)$ 是正则算子, 则

$$\begin{aligned}&(\lambda I-A)Q(\lambda,A)(p(\lambda)I-p(A))^{-1}=I,\\&(p(\lambda)I-p(A))^{-1}(\lambda I-A)Q(\lambda,A)=I.\end{aligned}$$

容易知道 $(\lambda I-A)$ 与 $Q(\lambda,A)$ 及 $Q(\lambda,A)$ 与 $(p(\lambda)I-p(A))^{-1}$ 都可交换, 所以由上式也可得出

$$\begin{aligned}&(\lambda I-A)[Q(\lambda,A)(p(\lambda)I-p(A))^{-1}]\\&=[Q(\lambda,A)(p(\lambda)I-p(A))^{-1}](\lambda I-A)=I,\end{aligned}$$

亦即 λ 是 A 的正则点, 矛盾. 于是 $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$ 或者

$$p(\sigma(A)) \subset \sigma(p(A)).$$

反之, 若 $\mu \overline{\in} p(\sigma(A))$, 则

$$\mu - p(\lambda) = a_n(\mu_1 - \lambda)\cdots(\mu_n - \lambda) \neq 0, \qquad \forall \lambda \in \sigma(A),$$

从而 $\lambda \neq \mu_i (i = 1, \cdots, n)$, 即每个 μ_i 都是 A 的正则点. 此时

$$\mu I - p(A) = a_n(\mu_1 I - A)\cdots(\mu_n I - A) \neq 0$$

必是正则算子. 于是 $\mu \overline{\in} \sigma(p(A))$, $\sigma(p(A)) \subset p(\sigma(A))$.

总之等号成立.

实际上这一定理还可以推广到解析函数或者连续函数的情况. 这里不再叙述.

5.2 紧算子的谱论

紧算子是一大类有界线性算子, 线性代数和积分方程中遇到的很多算子都是紧算子. 本节我们叙述关于紧算子谱的 Riesz-Schauder 理论. 为此, 我们做一些必要的准备.

设 X 是Banach 空间, $C(X)$ 是 X 中的紧算子全体.

引理 5.2.1 设 X 是Banach 空间, $N \subset X$ 是有限维子空间, 则 N 是可余的, 即存在闭子空间 M 使得 $X = M \oplus N$.

证明 N 是闭的, 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 N 的一组基, 对于每个 $x \in N$,

$$x = a_1(x)e_1 + \cdots + a_n(x)e_n,$$

此表达式是唯一的. 容易验证, $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ 是 N 上的线性泛函并且每个 $a_i(x)$ 是连续的. 实际上, $a_i(x) = 0$ 当且仅当

$$x = a_1(x)e_1 + \cdots + a_{i-1}(x)e_{i-1} + a_{i+1}(x)e_{i+1} + \cdots + a_n(x)e_n,$$

故 $N(a_i) = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_{i-1},\ e_{i+1}, \cdots, e_n\}$ 为 $n-1$ 维闭子空间.

a_i 在 N 上定义, 根据 Hahn-Banach 定理, a_i 可延拓到整个空间 X 上. 记延拓后的泛函为 $a_1^*, \cdots, a_n^*$, 设 $M = \bigcap\limits_{i=1}^{n} N(a_i^*)$, M 是闭线性子空间. 我们证明 $X = M \oplus N$.

首先, $\forall x\in X$, 记 $x'=a_1^*(x)e_1+\cdots+a_n^*(x)e_n$, 则 $x'\in N$ 并且

$$a_i^*(x-x')=a_i^*(x)-a_i^*(x')=a_i^*(x)-a_i^*(x)=0,\qquad i=1,\cdots,n.$$

于是 $y'=x-x'\in M$, 即 x 有分解 $x=x'+y'$. 所以 $X=M+N$.

另一方面, 若 $x\in M\bigcap N$, 则由 $x\in M$, 故对于每个 i, $x\in N(a_i), a_i(x)=0$, 再由 $x\in N$, 故

$$x=a_1(x)e_1+\cdots+a_n(x)e_n=0,$$

即 $M\bigcap N=\{0\}$.

引理 5.2.2　设 X 是Banach 空间, $A\in C(X),\lambda\in \mathbf{C},\lambda\neq 0$, 则 $N(\lambda I-A)$ 是有限维的, $R(\lambda I-A)$ 是 X 的闭子空间.

证明　(1) 考虑 $N=N(\lambda I-A),\lambda I-A$ 是有界线性算子, 故 N 是闭线性子空间. $\forall x\in N$, $Ax=\lambda x$, 即 $A(N)=\lambda N=N$. A 是紧算子, 设 $\{x_n\}$ 是单位球中的任一序列, 则 $\left\{\dfrac{x_n}{\lambda}\right\}$ 是有界序列, 并且 $A\left(\dfrac{x_n}{\lambda}\right)=x_n$. 于是 $\{x_n\}$ 中有子序列 $\{x_{n_k}\}$收敛. 这说明 N 的闭单位球是紧的, 从而 N 是有限维的.

(2) 由引理 5.2.1, 存在闭子空间 $M, X=M\oplus N$. 定义算子 $B:M\to X$, $Bx=\lambda x-Ax$. 由于在 N 上, $\lambda I-A=0$, 故 $R(B)=R(\lambda I-A)$. 我们证明存在 $a>0$, $\|Bx\|\geqslant a\|x\|$, $\forall x\in M$.

若不然, 存在 $x_n\in M, \|Bx_n\|<n^{-1}\|x_n\|$. 不失一般性, 设 $\|x_n\|=1$, 则 $\|Bx_n\|<n^{-1}$, $Bx_n\to 0$. A 是紧的, 故有子列 $x_{n_k}, Ax_{n_k}\to x_0\in X$. 但 $Ax_{n_k}=\lambda x_{n_k}-Bx_{n_k}$, 故 $\lambda x_{n_k}\to x_0(n_k\to\infty)$. 于是一方面由 B 的连续性, $Bx_0=\lim\limits_{n_k\to\infty}\lambda Bx_{n_k}=0$, 从而 $x_0=0$. 另一方面

$$\|x_0\|=\lim_{n_k\to\infty}\|\lambda x_{n_k}\|=|\lambda|\neq 0,$$

矛盾说明有限的 a 存在.

若 $y_n\in R(B), y_n\to y$, 不妨设 $y_n=Bx_n, x_n\in M$, 则

$$\|y_m-y_n\|=\|B(x_m-x_n)\|\geqslant a\|x_m-x_n\|,$$

$\{x_n\}$ 是 M 中的Cauchy 序列, M 闭, 故存在 $x_0\in M, x_n\to x_0$. 令 $y_0=Bx_0$, 则 $y=\lim\limits_{n\to\infty}B_nx_0=y_0\in R(B)$. $R(B)$ 是闭的, 所以 $R(\lambda I-A)$ 是闭的.

引理 5.2.3　设 X 为Banach 空间, $A\in B(X)$, 则对应于 A 的不同特征值的特征向量彼此线性无关.

证明 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的互不相同的特征值, $x_1,\cdots,x_n$ 是相应的特征向量, $x_i\neq 0$, $Ax_i=\lambda_i x_i\ (i=1,\cdots,n)$. 若 $x_1,\cdots,x_n$线性相关, 不失一般性, 设 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_ix_i$, 则一方面

$$\begin{aligned}(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-1}I-A)x_n&=(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-1}x_n-Ax_n)\\&=(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-2}I-A)x_n(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\\&\quad\cdots\cdots\\&=(\lambda_1-\lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_n\neq 0;\end{aligned}$$

另一方面, 它们是可交换的, 从而

$$\begin{aligned}(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-1}I-A)x_n&=(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-1}I-A)\sum_{i=1}^{n-1}a_ix_i\\&=\sum_{i=1}^{n-1}a_i(\lambda_1 I-A)\cdots(\lambda_{n-1}I-A)x_i=0.\end{aligned}$$

矛盾. 由于任意有限多个这样的特征向量都线性无关, 故结论成立.

定理 5.2.1 设 X 是Banach 空间, $A\in C(X)$, 则

(1) A 的非零谱点都是特征值.

(2) $\sigma(A)$ 是可数集, 0 是 $\sigma(A)$ 唯一可能的聚点.

(3) 若 $\dim X=\infty$, 则 $0\in\sigma(A)$.

(4) 对应于每个非零特征值的特征向量空间是有限维的.

证明 (1) 我们证明当 $\lambda\neq 0$ 时, 若 $\lambda I-A$ 是一一映射, 则 $\lambda I-A$ 是到上的. 由逆算子定理 $(\lambda I-A)^{-1}\in B(X)$, 于是 $\lambda\in\rho(A)$, 便得到 (1).

令 $T=\lambda I-A$, 对于任意正整数 n,

$$\begin{aligned}T^n&=(\lambda I-A)^n\\&=\lambda^n I-\mathrm{C}_n^1\lambda^{n-1}A+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^nA^n\\&=\lambda^n I-B,\end{aligned}$$

其中 B 是 A 与一个有界线性算子的乘积. 由命题 3.3.1(4) 知道 B 是紧算子.

根据引理 5.2.2, $R(T^n)=R(\lambda^n I-B)$ 是 X 的闭线性子空间, 显然 $R(T^{n+1})\subset R(T^n)(n=1,2,\cdots)$. 如果 $\forall n, R(T^{n+1})$ 都是 $R(T^n)$ 的真子空间, 由 1.4 节 Riesz 引理, 存在 $y_n\in R(T^n)$, 使得

$$\|y_n\|=1,\qquad d(y_n,R(T^{n+1}))\geqslant\frac{1}{2}.$$

注意 $T(R(T^n)) \subset R(T^{n+1})$, 所以 $Ty_n = \lambda y_n - Ay_n \in R(T^{n+1})$. 记

$$\lambda y_n - Ay_n = T^{n+1}x_0,$$
$$Ty_m = \lambda y_m - Ay_m = T^{m+1}x_0', \quad x_0, x_0' \in X.$$

若 $m > n$, 则

$$y_m \in R(T^m) \subset R(T^{n+1}), \qquad T^{m+1}x_0' \in R(T^{m+1}) \subset R(T^{n+1}),$$
$$T^{n+1}x_0 \in R(T^{n+1}).$$

于是

$$\begin{aligned}||Ay_n - Ay_m|| &= ||(\lambda y_n - \lambda y_m) - (T^{n+1}x_0 - T^{m+1}x_0')|| \\ &= |\lambda| \left|\left| y_n - \left(y_m + T^{n+1}\frac{x_0}{\lambda} - T^{m+1}\frac{x_0'}{\lambda}\right)\right|\right| \\ &\geqslant |\lambda| d(y_n, R(T^{n+1})) \geqslant \frac{|\lambda|}{2} > 0.\end{aligned}$$

这与 A 的紧性矛盾, 于是存在 $n_0, R(T^{n_0+1}) = R(T^{n_0})$.

$\forall y \in R(T^{n_0-1})$, $Ty \in R(T^{n_0}) = R(T^{n_0+1})$. 不妨设 $Ty = T^{n_0+1}x = T(T^{n_0}x), x \in X$. 由于 T 是一一的, 则 $y = T^{n_0}x \in R(T^{n_0})$, 从而

$$R(T^{n_0-1}) \subset R(T^{n_0}), \qquad R(T^{n_0-1}) = R(T^{n_0}).$$

继续这一过程最后得到 $R(T) = X$, T 是到上的.

(2) 只需证明, 对于任意 $t > 0$,

$$\{\lambda : \lambda \in \sigma(A), |\lambda| > t\}$$

是有限集. 若不然, 由 (1) 知, 存在互不相同的一列 $\lambda_n \in \sigma(A)$, $|\lambda_n| > t$, λ_n 是 A 的特征值. 不妨设 x_n 是相应的特征向量, $x_n \neq 0$, $\quad Ax_n = \lambda_n x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 由引理 5.2.3, $\{x_n\}$ 彼此线性无关, 记 $M_n = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 则 $\dim M_n = n$. $\quad M_n$ 是闭子空间并且 $M_{n-1} \subset M_n, M_{n-1} \neq M_n$. 仍由 Riesz 引理, 存在

$$y_n \in M_n, \quad ||y_n|| = 1, \quad d(y_n, M_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

不妨设 $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} x_i$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_n y_n - Ay_n &= \alpha_{nn}(\lambda_n I - A)x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}(\lambda_n I - A)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}(\lambda_n - \lambda_i)x_i \in M_{n-1}.\end{aligned}$$

为简便起见, 记 $\lambda_n y_n - Ay_n = z_{n-1}$. 类似地记

$$\lambda_m y_m - Ay_m = z_{m-1}, \qquad z_{m-1} \in M_{m-1}.$$

若 $m > n$, 则 $z_{n-1} \in M_{n-1} \subset M_{m-1}$, $y_n \in M_n \subset M_{m-1}$, 所以

$$\begin{aligned}||Ay_m - Ay_n|| &= ||(\lambda_m y_m - \lambda_n y_n) - (z_{m-1} - z_{n-1})|| \\ &= |\lambda_m| \left\| y_m - \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n + \frac{z_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{z_{n-1}}{\lambda_m} \right) \right\| \\ &\geqslant |\lambda_m| d(y_m, M_{m-1}) \geqslant \frac{|t|}{2} > 0.\end{aligned}$$

与 A 的紧性矛盾. 故 $\{\lambda : \lambda \in \sigma(A), |\lambda| > t\}$ 是有限集, $t > 0$ 是任意的, 所以 $\sigma(A)$ 是可数集, 并且 0 是 $\sigma(A)$ 唯一可能的聚点.

(3) 若 $0 \in \rho(A)$, 则 $0\lambda - A = -A$ 是正则算子. A^{-1} 有界, A 紧, 故 $I = AA^{-1}$ 是紧算子, 这说明 X 的闭单位球是紧的, 从而 X 是有限维空间, 与所设条件矛盾.

(4) 若 $\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq 0$, λ 对应的特征向量空间为 $N(\lambda I - A)$, 由引理 5.2.2 即得之. 证毕.

由定理 5.2.1 可知, 对于任何紧算子 A 和 $\lambda \neq 0$, 要么 $\lambda \in \rho(A)$, 要么 $\lambda \in \sigma_p(A)$. 这通常被称为紧算子的 Fredholm 择一定理. 相应于算子方程 $(\lambda I - A)x = y$ 来讲, 这相当于要么此方程对任何 $y \in X$ 有唯一解, 要么相应的齐次方程 $(\lambda I - A)x = 0$ 有非 0 解. 这和线性方程组的情况是一致的, 和积分方程中的很多情况也是吻合的.

定义 5.2.1 设 X 为线性赋范空间, X^* 是 X 的共轭空间.

(1) 若 $x \in X, x^* \in X^*, x^*(x) = 0$, 称 x^* 与 x正交, 记为 $x \perp x^*$.

(2) 设 $M \subset X, N \subset X^*$, 若 $\forall x \in M, x^* \in N, x \perp x^*$, 则称 M 与 N正交, 记为 $M \perp N$.

特别地, $\{x\} \perp N$ 时记为 $x \perp N$.

定理 5.2.2 设 X 是Banach 空间, $A \in C(X), \lambda \neq 0$, A^* 是 A 的共轭算子.

(1) 若 $y \in X$, 则方程 $(\lambda I - A)x = y$ 可解的充要条件是 $y \perp N(\lambda I^* - A^*)$.

(2) 若 $y^* \in X^*$, 则共轭方程 $(\lambda I^* - A^*)x^* = y^*$ 可解的充要条件是 $y^* \perp N(\lambda I - A)$.

其中 $N(\lambda I^* - A^*)$ 是 A^* 的相应于 λ 的特征向量空间, $N(\lambda I - A)$ 是 A 的相应于 λ 的特征向量空间.

证明 (1) 若 $(\lambda I - A)x = y$ 有解 x, $x^* \in N(\lambda I^* - A^*)$, 则

$$\begin{aligned}x^*(y) &= (x^*, (\lambda I - A)x) = ((\lambda I - A)^* x^*, x) \\ &= ((\lambda I^* - A^*)x^*, x) = 0,\end{aligned}$$

故 $y \perp N(\lambda I^* - A^*)$.

反之, 若 $y \perp N(\lambda I^* - A^*)$, 我们证明 $y \in R(\lambda I - A)$. 若不然, $y \overline{\in} R(\lambda I - A)$, 由引理 5.2.2, $R(\lambda I - A)$ 是闭子空间, 根据 Hahn-Banach 定理, 存在 $x^* \in X, x^*(y) \neq 0$, 但在 $R(\lambda I - A)$ 上 $x^* = 0$. 由此, 一方面

$$y' = (\lambda I - A)x \in R(\lambda I - A), \qquad \forall x \in X,$$

从而

$$((\lambda I^* - A^*)x^*, x) = (x^*, (\lambda I - A)x) = x^*(y') = 0.$$

这说明 $(\lambda I^* - A^*)x^* = 0, x^* \in N(\lambda I^* - A^*)$. 另一方面, 由 $x^*(y) \neq 0$ 知道 $y \perp N(\lambda I^* - A^*)$ 不成立, 从而出现矛盾. 故 $y \in R(\lambda I - A)$, 所以存在 $x \in X$, 使得 $y = (\lambda I - A)x$.

(2) 若对于 $y^* \in X^*$, 共轭方程 $(\lambda I^* - A^*)x^* = y^*$ 有解 x^*, 则 $\forall x \in N(\lambda I - A)$,

$$y^*(x) = ((\lambda I^* - A^*)x^*, x) = (x^*, (\lambda I - A)x) = 0,$$

故 $y^* \perp N(\lambda I - A)$.

反之, 若 $y^* \perp N(\lambda I - A)$, 对于任意的 $y \in R(\lambda I - A)$, 不妨设 $y = (\lambda I - A)x$, 令 $y_0^*(y) = y^*(x)$, 我们将验证 y_0^* 是 $R(\lambda I - A)$ 上的连续线性泛函. 首先 y_0^* 有确定的意义. 实际上, 若另有 $y = (\lambda I - A)x'$, 则 $(\lambda I - A)(x - x') = 0, x - x' \in N(\lambda I - A)$. 但 $y^* \perp N(\lambda I - A)$, 所以 $y^*(x - x^*) = 0, y^*(x) = y^*(x^*)$, 这说明 $y_0^*(y)$ 由 y 唯一确定.

y_0^* 在 $R(\lambda I - A)$ 上是线性的, 现在证明 y_0^* 连续. 设 $y_n \in R(\lambda I - A)$, 不妨设 $y_n = (\lambda I - A)x_n \to 0$, 根据引理 5.2.2 中 $R(\lambda I - A)$ 为闭子空间的证明, 存在 $a > 0, ||(\lambda I - A)x|| \geqslant a||x||$, 即

$$||y_n|| = ||(\lambda I - A)x_n|| \geqslant a||x_n||,$$

于是 $\{x_n\}$ 是有界序列. A 紧, 不妨设 $Ax_{n_k} \to x_0$. 对 $y_{n_k} = (\lambda I - A)x_{n_k}$ 两端取极限得 $\lambda x_{n_k} \to x_0$, 由 $\lambda I - A$ 的连续性又得到

$$(\lambda I - A)x_0 = \lim_{n_k \to \infty} \lambda(\lambda I - A)x_{n_k} = \lim_{n_k \to \infty} \lambda y_{n_k} = 0.$$

于是 $x_0 \in N(\lambda I - A)$, $y^*(x_0) = 0$ 以及

$$y_0^*(y_{n_k}) = y_0^*(\lambda I - A)x_{n_k} = y^*(x_{n_k}) \to \frac{1}{\lambda} y^*(x_0) = 0.$$

这说明对于任一序列 $y_n \to 0$, 都可以选出子序列 $\{y_{n_k}\}, y_0^*(y_{n_k}) \to 0$, 故必有 $y_0^*(y_n) \to 0$, y_0^* 连续.

根据 Hahn-Banach 定理, 存在 $x^* \in X^*$, 在 $R(\lambda I - A)$ 上 $x^*(y) = y_0^*(y)$. 现在对于任何 $x \in X$,

$$((\lambda I^* - A^*)x^*, x) = (x^*, (\lambda I - A)x) = (x_0^*, (\lambda I - A)x)$$
$$= y_0^*(y) = y^*(x).$$

故 $y^* = (\lambda I^* - A^*)x^*, x^*$ 是共轭方程的解. 证毕.

定理 5.2.3 设 X 是Banach 空间, $A \in C(X), \lambda \neq 0, A^*$ 是 A 的共轭算子. 则

(1) $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

(2) 设 $\lambda, \mu \in \sigma(A), x$ 是 A 的相应于 λ 的特征向量, x^* 是 A^* 的相应于 μ 的特征向量, $\lambda \neq \mu$, 则 $x \perp x^*$, 从而 $N(\lambda I - A) \perp N(\mu I^* - A^*)$.

(3) 若 $\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq 0$, 则

$$\dim N(\lambda I - A) = \dim N(\lambda I^* - A^*) < \infty.$$

证明 (1) 注意到 A^* 也是紧算子, 故当 $\lambda \neq 0$, λ 不是 A^* 的特征值时, λ 一定是正则点. 若 $\dim X < \infty$, 相应于 A^* 的矩阵是相应于 A 的矩阵的转置, 根据线性代数的知识, 二者有相同的特征值, 结论成立.

若 $\dim X = \infty$, 由定理 5.2.1(3), $0 \in \sigma(A)$, 同时 $\dim X^* = \infty$, 于是 $0 \in \sigma(A^*)$. 现在设 $\lambda \neq 0$, 我们只须证明 $\lambda \in \rho(A)$ 当且仅当 $\lambda \in \rho(A^*)$.

若 $\lambda \in \rho(A)$, 由 5.1 节定理 5.1.4(1), $(\lambda I - A)x = y$ 对于任何 $y \in X$ 有解, 从定理 5.2.2 知道 $y \perp N(\lambda I^* - A^*)$. 由 y 的任意性知道 $N(\lambda I^* - A^*) = \{0\}$, 即 $\lambda I^* - A^*$ 是一一映射. 根据定理 5.2.1 证明中的 (1), $\lambda I^* - A^*$ 是到上的, 从而 $\lambda \in \rho(A^*)$.

反之, 若 $\lambda \in \rho(A^*)$, 则 $(\lambda I^* - A^*)x^* = y^*$ 对于任意的 y^* 有解. 于是由定理 5.2.2, $y^* \perp N(\lambda I - A)$. 所以 $N(\lambda I - A) = \{0\}$, $\lambda I - A$ 是一一的. 仍由定理 5.2.1 证明中的 (1), $\lambda I - A$ 到上, 故 $\lambda \in \rho(A)$. 总之, $\rho(A) = \rho(A^*)$, 从而又有 $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

(2) 任取 $x \in N(\lambda I - A), x^* \in N(\mu I^* - A^*)$, 则 $Ax = \lambda x, A^*x^* = \mu x^*$, 于是

$$\lambda x^*(x) = (\lambda x, x^*) = (Ax, x^*)$$
$$= (x, A^*x^*) = (x, \mu x^*) = \mu x^*(x),$$

或 $(\lambda - \mu)x^*(x) = 0$. 由 $\lambda \neq \mu$, 故

$$x^*(x) = 0, \qquad N(\lambda I - A) \perp N(\mu I^* - A^*).$$

(3) 设 $\dim N(\lambda I - A) = n, \dim N(\lambda I^* - A^*) = n^*$. 根据定理 5.2.1(4), 二者都是有限的.

首先证明 $n^* \leqslant n$. 若 $n^*=0$, 不等式自然成立. 若 $n=0$, 即 $N(\lambda I-A)=\{0\}$, 于是 $\lambda I-A$ 是一一的. 由定理 5.2.1 证明的 (1), $\lambda I-A$ 还是到上的, 即 $\lambda\in\rho(A)$. 由上面的 (1), $\lambda\in\rho(A^*)$, 故 $N(\lambda I^*-A^*)=\{0\}$, $n^*=0$, 所以等号成立.

现在考虑 n, n^* 都不是 0 的情况. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $N(\lambda I-A)$ 的一组基, $y_1^*,\cdots,y_{n^*}^*$ 是 $N(\lambda I^*-A^*)$ 的一组基, 由本节引理 5.2.1 的证明不难知道存在 $x_1^*,\cdots,x_n^*$, 使得

$$x_j^*(x_i)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

又容易用归纳的方法证明, 存在 $y_1,\cdots,y_{n^*}$ 使得

$$y_j^*(y_i)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

实际上它们分别是相应基底的对偶基.

定义 $F:X\to X$,

$$F(x)=\sum_{i=1}^n x_i^*(x)y_i,\qquad \forall x\in X.$$

显然 F 是有界线性算子并且是有限秩算子, 从而 F 是紧的. 算子 $B=A+F$ 是紧的. 我们证明 $\lambda I-B$ 是一一映射.

实际上, 若 $(\lambda I-B)x=0$, 则

$$(\lambda I-A)x=F(x)=\sum_{i=1}^n x_i^*(x)y_i. \tag{5.2.1}$$

由 $y_j^*\in N(\lambda I^*-A^*)$ 得到

$$0=((\lambda I-A)x,\ y_j^*)=\left(\sum_{i=1}^n x_i^*(x)y_i,\ y_j^*\right)=x_j^*(x),\qquad j=1,\cdots,n,$$

代入 (5.2.1) 得到 $(\lambda I-A)x=0$, 即 $x\in N(\lambda I-A)$. 由于 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $N(\lambda I-A)$ 的一组基, 不妨设 $x=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i x_i$. 再由

$$\alpha_j=x_j^*\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\right)=x_j^*(x)=0,\qquad j=1,\cdots,n,$$

所以 $x=0$, $\lambda I-B$ 是一一的. 由定理 5.2.1 证明的 (1), $\lambda I-B$ 是到上的.

若 $n < n^*$, 取 $x \in X$ 使 $(\lambda I - B)x = y_{n+1}$, 则

$$\begin{aligned}1 &= y^*_{n+1}(y_{n+1}) = ((\lambda I - B)x, y^*_{n+1}) \\ &= ((\lambda I - A)x, y^*_{n+1}) - (F(x), y^*_{n+1}) \\ &= (x,\ (\lambda I^* - A^*)y^*_{n+1}) - \left(\sum_{i=1}^{n} x^*(x)y_i,\ y^*_{n+1}\right) = 0.\end{aligned}$$

因为 $y^*_{n+1} \in N(\lambda I^* - A^*)$, 矛盾. 说明 $n^* \leqslant n$.

现在由 $X \subset X^{**}$, 当 $(\lambda I - A)x = 0$ 时,

$$\begin{aligned}0 &= ((\lambda I - A)x,\ x^*) = (x,\ (\lambda I^* - A^*)x^*) \\ &= (x^{**}, (\lambda I^* - A^*)x^*) = ((\lambda I^{**} - A^{**})x^{**}, x^*), \quad \forall x^* \in X^*,\end{aligned}$$

即 $(\lambda I^{**} - A^{**})x^{**} = 0$, 故 $N(\lambda I - A) \subset N(\lambda I^{**} - A^{**})$.

记 $n^{**} = \dim N(\lambda I^{**} - A^{**})$, 于是 $n \leqslant n^{**}$. 但类似于上面的证明可知 $n^{**} \leqslant n^*$. 由此 $n \leqslant n^*$. 总之, $n = n^*$. 证毕.

例 5.2.1 考虑空间 l^2 上的线性算子 $A: l^2 \to l^2$,

$$Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right), \qquad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2.$$

首先

$$||Ax|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x_n}{n}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||x||,$$

T 是有界线性算子. 设

$$A_n: l^2 \to l^2, \qquad A_n x = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, 0, \cdots\right),$$

则 $||A_n|| \leqslant 1, A_n$ 是有限秩算子从而是紧的. 由

$$\begin{aligned}||A_n - A|| &= \sup_{||x||\leqslant 1} ||(A_n - A)x|| = \sup_{||x||\leqslant 1}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sup_{||x||\leqslant 1}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0,\end{aligned}$$

A 也是紧算子.

若 $e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{n} 0, \cdots)$, 则 $Ae_n = \frac{1}{n}e_n$. 由定义, $\frac{1}{n}$ 是 A 的特征值, e_n 是相应的特征向量.

$\forall x \in l^2, Ax = 0$ 仅当 $x = 0$, 于是 A 是一一映射, 0 不是特征值. 注意 A 不是到上的. 例如, 对于 $y_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right) \in l^2$, 若 $Ax_0 = y_0$, 则应有 $x_0 = (1, 1, \cdots)$. 但 $x_0 \notin l^2$, 因此 0 是谱点. 我们将证明 $\sigma_p(A) = \left\{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\right\}$, 从而 $\sigma(A) = \sigma_p(A) \bigcup \{0\}$.

实际上, 若 $\lambda \neq 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$, 则要使 $(\lambda I - A)x = 0$, 即

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)x &= \lambda(x_1, x_2, \cdots) - \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right) \\ &= \left((\lambda - 1)x_1, \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) x_2, \cdots\right) = 0,\end{aligned}$$

必须 $x_1 = x_2 = \cdots = 0$, 即 $x = 0$. 这说明 $\lambda I - A$ 是一一的, 由定理 5.2.1(1) 的证明, $\lambda I - A$ 是到上的, 从而 $\lambda \in \rho(A)$.

最后, 对于 $\lambda_n = \frac{1}{n}$, 考虑 $(\lambda_n I - A)x = 0$ 的 x, $\lambda_n x = Ax$, 即

$$\left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \cdots\right) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right).$$

若 $i \neq n$, 要使 $\frac{x_i}{n} = \frac{x_i}{i}$, 必须 $x_i = 0$, 故满足上面式子的 x 具有形式 $(0, \cdots, 0, x_n, 0, \cdots)$ 或 $x = x_n e_n$. 于是

$$N(\lambda_n I - A) = \text{span}\{e_n\}, \qquad \dim N(\lambda_n I - A) = 1, \quad n \geqslant 1.$$

5.3 自伴算子的谱论

本节我们讨论复Hilbert 空间上的自伴算子.

定理 5.3.1 若 H 是复Hilbert 空间, $A \in B(H)$, A^* 是 A 的伴随算子, 则

(1)
$$\begin{aligned}\rho(A^*) &= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \rho(A)\}, \\ \sigma(A^*) &= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}.\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

(2) 若 x 是 A 的相应于 λ 的特征向量, y 是 A^* 的相应于 μ 的特征向量, $\lambda \neq \overline{\mu}$, 则 $x \perp y$.

证明 (1) 只需证明第一式. 若 $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda I - A$ 是正则算子, 此时 $(\lambda I - A)^* = \overline{\lambda} I - A^*$ 正则, 故 $\overline{\lambda} \in \rho(A^*)$. 此即

$$\{\overline{\lambda} : \lambda \in \rho(A)\} \subset \rho(A^*).$$

另一方面 $(A^*)^* = A$, 于是 $\{\overline{\lambda} : \lambda \in \rho(A^*)\} \subset \rho(A^{**}) = \rho(A)$, 两端取复共轭得到 $\rho(A^*) \subset \{\overline{\lambda} : \lambda \in \rho(A)\}$, 从而得到等式.

(2) 若 $(\lambda I - A)x = 0, (\mu I - A^*)y = 0, x \neq 0, y \neq 0$, 则

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, A^*y)$$
$$= (x, \mu y) = \overline{\mu}(x,y).$$

于是 $(\lambda - \overline{\mu})(x,y) = 0$, $\lambda \neq \overline{\mu}$, 故 $(x,y) = 0$, 从而 $x \perp y$.

定理 5.3.2 设 H 是Hilbert 空间, $A \in B(H)$ 是自伴算子. 则

(1) A 的谱点都是实数, 特别地 A 的特征值都是实数.

(2) 对应于不同特征值的特征向量彼此正交.

(3) $\sigma_r(A) = \varnothing$.

证明 (1) $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $x \in X$, 由自伴性

$$((\lambda I - A)x, x) - (x, (\lambda I - A)x)$$
$$= \lambda\|x\|^2 - (Ax, x) - \overline{\lambda}\|x\|^2 + (x, Ax)$$
$$= 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\lambda\|x\|^2,$$

其中 $\mathrm{Im}\lambda$ 是 λ 的虚部. 于是

$$2|\mathrm{Im}\lambda|\|x\|^2 \leqslant |((\lambda I - A)x, x)| + |(x, (\lambda I - A)x)|$$
$$\leqslant 2\|(\lambda I - A)x\|\,\|x\|$$

或者

$$\|(\lambda I - A)x\| \geqslant |\mathrm{Im}\lambda|\,\|x\|.$$

由此知道当 $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ 时 $\lambda I - A$ 是一一的. 此外令 $(\lambda I - A)x = y$, 则

$$\|(\lambda I - A)^{-1}y\| \leqslant |\mathrm{Im}\lambda|^{-1}\|y\|,$$

$(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的. 此时 $\lambda I - A$ 的伴随 $\overline{\lambda}I - A$ 也是一一的. 由定理 4.3.6, $\overline{R(\lambda I - A)} = H$, 根据 $(\lambda I - A)^{-1}$ 的有界性, $R(\lambda I - A) = H$. 于是 $\lambda I - A$ 是正则的. 矛盾即说明 $\mathrm{Im}\lambda = 0$, $\sigma(A) \subset R$.

(2) A 是自伴算子, $A^* = A$. 若 x, y 是相应于 λ, μ 的特征向量, 由 (1), λ, μ 为实数, $\lambda \neq \overline{\mu}$, 即 $\lambda \neq \mu$. 由定理 5.3.1(2) 即得到所要的结论.

(3) 若 $\lambda \in \sigma_r(A)$, 由 (1), λ 是实数, 从而 $(\lambda I - A)^* = \lambda I - A$. 由于 $\overline{R(\lambda I - A)} \neq H$, 由定理 4.3.6,

$$N(\lambda I - A) = \overline{R(\lambda I - A)}^{\perp} \neq \{0\},$$

于是 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 矛盾.

为了更精细地考察自伴算子谱点的特性, 我们引进下面概念.

定义 5.3.1　设 H 是Hilbert 空间, $A \in B(H)$, 称集合

$$\omega(A) = \{(Ax, x) : x \in H, ||x|| = 1\} \tag{5.3.2}$$

为 A 的数值值域. 称 $R_A = \sup\{|\mu| : \mu \in \omega(A)\}$ 是算子 A 的数值半径.

定理 5.3.3　设 H 是Hilbert 空间, $A \in B(H)$ 是自伴算子, 则

(1) $\sigma(A) \subset \overline{\omega(A)}$, 特别地, $\sigma(A)$, $\omega(A)$ 都由实数构成.

(2) $R_A = ||A||$.

证明　(1) 注意 (Ax, x) 是实数, 我们证明当 $\lambda \overline{\in} \overline{\omega(A)}$ 时 $\lambda \overline{\in} \sigma(A)$. 设 $d = d(\lambda, \overline{\omega(A)}) = \inf\limits_{\mu \in \omega(A)} |\lambda - \mu|$, 则 $d > 0$. 若 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} d||x||^2 &\leqslant \left|\lambda - \left(A\left(\frac{x}{||x||}\right), \frac{x}{||x||}\right)\right| ||x||^2 \\ &= |\lambda(x, x) - (Ax, x)| \\ &= |((\lambda I - A)x, x)| \\ &\leqslant ||(\lambda I - A)x||\, ||x||. \end{aligned}$$

于是

$$d||x|| \leqslant ||(\lambda I - A)x||. \tag{5.3.3}$$

类似于定理 5.2.2(2) 的证明我们知道 $R(\lambda I - A)$ 是 H 的闭子空间. $\lambda I - A$ 还是到上的. 若不然, 由 Riesz 表现定理, 存在 $y \in H, ||y|| = 1$, 使得 $\forall x \in H$, $((\lambda I - A)x, y) = 0$. 特别地, $((\lambda I - A)y, y) = 0$, 于是

$$\lambda = \lambda||y||^2 = (Ay, y) \in \omega(A),$$

与所设矛盾. 于是 $\lambda I - A$ 既是一一的又是到上的, 由逆算子定理, $(\lambda I - A)^{-1}$ 是有界的. 所以 $\lambda \in \rho(A)$. (1) 成立.

(2) $\forall \mu \in \omega(A)$, 存在 $x \in H, ||x|| = 1, \mu = (Ax, x)$. 于是

$$|\mu| = |(Ax, x)| \leqslant ||A||\, ||x||^2 = ||A||,$$

故 $R_A = \sup\{|\mu| : \mu \in \omega(A)\} \leqslant ||A||$.

另一方面, 设 $R_A = a$, 则 $|(Ax, x)| \leqslant a||x||^2$. 根据定理 4.3.8,

$$||A|| = \sup_{||x|| \leqslant 1} |(Ax, x)| \leqslant a = R_A.$$

证毕.

定理 5.3.4 设 H 是Hilbert 空间, $A \in B(H)$ 是自伴算子, 则 $M, m \in \sigma(A)$, 其中 $M = \sup\limits_{\mu \in \omega(A)} \mu$, $m = \inf\limits_{\mu \in \omega(A)} \mu$.

证明 这里仅证明 $M \in \sigma(A)$, 对于 $m \in \sigma(A)$ 可类似证之.

设 $B = MI - A$, 则

$$(Bx, x) = M(x, x) - (Ax, x), \qquad \forall x \in H.$$

根据 M 的定义, 显然 $(Bx, x) \geqslant 0$ 并且

$$\inf_{||x||=1} (Bx, x) = 0. \tag{5.3.4}$$

现在, 若 t 是任一实数, 则

$$(B(tBx + x), tBx + x) \geqslant 0,$$

即

$$t^2(B^2x, Bx) + t(Bx, Bx) + t(B^2x, x) + (Bx, x) \geqslant 0.$$

由 B 的自伴性得到

$$t^2(B^2x, Bx) + 2t(Bx, Bx) + (Bx, x) \geqslant 0,$$

各项系数均为实数, 故

$$(Bx, Bx)^2 \leqslant (B^2x, Bx)(Bx, x). \tag{5.3.5}$$

于是

$$||Bx||^4 = (Bx, Bx)^2 \leqslant ||B||^3||x||^2|(Bx, x)|.$$

由 (5.3.4),

$$\inf_{||x||=1} ||Bx|| = 0. \tag{5.3.6}$$

若 B 是一一的到上的, 由 5.1 节定理 5.1.1, 存在 $a > 0$, 使得 $\forall x \in H$, $||Bx|| \geqslant a||x||$, 从而 $\inf\limits_{||x||=1} ||Bx|| \geqslant a > 0$, 与 (5.3.6) 矛盾. B 不可能是一一的到上的, 故 $M \in \sigma(A)$.

推论 5.3.1 设 H 是Hilbert 空间, $A \in B(H)$ 是自伴算子. 则

(1) $r_A = R_A = ||A||$.

(2) $r_{A^*A} = \|A\|^2$.

这里 r_A 是 A 的谱半径, R_A 是 A 的数值半径, r_{A^*A} 是 A^*A 的谱半径.

证明 (1) 实际上由定理 5.3.4, $\max(|M|,|m|) \leqslant \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| = r_A$, 故

$$R_A = \sup_{\mu\in\omega(A)} |\mu| = \max(|M|,|m|) \leqslant r_A.$$

但显然 $r_A = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| \leqslant \sup\limits_{\mu\in\omega(A)} |\mu| = R_A$. 再由定理 5.3.3 得到 (1).

(2) 注意到 A^*A 是自伴算子, 由 (1) 得到

$$r_{A^*A} = \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

后一等式是根据定理 4.3.5(4).

例 5.3.1 设 H 是Hilbert 空间, $E\subset H$ 是闭线性子空间, $E\neq\{0\}$ 和 H. 考虑投影算子 $P: H\to E$, 由于 $H = E\oplus E^{\perp}, E^{\perp}\neq\{0\}$, 故存在 $x\in E$, $\|x\| = 1, (Px,x) = \|Px\|^2 = \|x\|^2 = 1$. 又存在 $x\in E^{\perp}$, $\|x\| = 1$, $Px = 0$, $(Px,x) = 0$. 于是 $0\leqslant (Px,x)\leqslant 1$. 由定理 5.3.4,

$$\{0,1\}\subset\sigma(P)\subset[0,1].$$

上述事实也可以分别写成 $(I-P)x = 0$ 或 $Px = 0$, 于是 $0,1\in\sigma_p(P)$.

若 $0<\lambda<1$, $x = x_1 + x_2$ 是正交分解, $x_1\in E, x_2\perp E$, 则 $(\lambda I - P)x = 0$ 时, 即 $(\lambda-1)x_1 + \lambda x_2 = 0$, 故必有 $x = x_1 = x_2 = 0$, $\lambda I - P$ 是一一的. 另一方面, $\forall y\in H$, 若 $y = y_1 + y_2$ 是关于 E 的正交分解, $y_1\in E, y_2\perp E$, 取 $x = \dfrac{y_1}{\lambda-1} + \dfrac{y_2}{\lambda}$, 则 $(\lambda I - P)x = y$, $\lambda I - P$ 是到上的. 于是 $\lambda\in\rho(P)$. 总之, $\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0,1\}$.

下面我们讨论紧自伴算子的谱.

定理 5.3.5 设 H 是Hilbert 空间, A 是紧自伴算子. M, m 如定理 5.3.4. 若 $M\neq 0$(或 $m\neq 0$), 则 M(或 m) 是 A 的特征值.

证明 现只证 M, 对于 m 可类似证明.

设 $M\neq 0$, 记 $B = MI - A$, 由定理 5.3.4 的证明知道 (5.3.6) 成立. 故存在 $x_n\in H$, $\|x_n\| = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|Bx_n\| = 0$. A 紧, 于是有子列 x_{n_k}, $Ax_{n_k}\to x_0$. 由 $Bx_n = Mx_n - Ax_n$ 知道 $Mx_{n_k}\to x_0$, 于是 $Ax_0 = \lim\limits_{n_k\to\infty} MAx_{n_k} = Mx_0$. 又 $\|x_0\| = \lim\limits_{k\to\infty} M\|x_{n_k}\| = M\neq 0$, 故 M 是 A 的特征值, $M\in\sigma_p(A)$.

定理 5.3.6 设 H 是Hilbert 空间, A 是紧自伴算子. 则

(1) 存在有限或无穷非 0 实数序列 $\{\lambda_n\}$, λ_n 是 A 的特征值,

$$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots.$$

若 $\{\lambda_n\}$ 是无穷的, 则 $\lambda_n \to 0$. 相应地存在规范正交序列 $\{e_n\}$, 使得 $Ae_n = \lambda_n e_n$, 并且 $\forall x \in H$,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n. \tag{5.3.7}$$

(2) 若 P_n 是 H 到由 e_n 张成的线性子空间上的投影算子, 则

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n. \tag{5.3.8}$$

(3) 若 0 不是 A 的特征值, 则 $\{e_n : n \geqslant 1\}$ 是 H 的正交基.

证明 (1) 不妨设 $A \neq 0$, 若 $\lambda_1 = \max\{|M|, |m|\} = \|A\|$, 由定理 5.3.5, λ_1 是特征值. 设 e_1 是相应的特征向量, $\|e_1\| = 1$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. 令 $Q_1 = \mathrm{span}\{e_1\}$, $H_1 = \{x \in H : x \perp e_1\}$, 则 Q_1, H_1 是 H 的闭线性子空间并且 $A(H_1) \subset H_1$. 实际上若 $x \in H_1$, 则

$$(Ax, e_1) = (x, Ae_1) = \lambda_1 (x, e_1) = 0.$$

所以 $Ax \in H_1$.

于是 H_1 仍然是Hilbert 空间. 定义 $A_1 = A|_{H_1}$, 显然 A_1 仍是在 H_1 上的紧自伴算子. 若 $A_1 = 0$, 则 $\forall x \in H$, 根据投影定理 $x = q_1 + h_1$, 其中 $q_1 \in Q_1$, $h_1 \in H_1$. 此时

$$\begin{aligned} Ax &= Aq_1 + Ah_1 = \lambda_1 q_1 \\ &= \lambda_1 (q_1, e_1) e_1 = \lambda_1 (x, e_1) e_1. \end{aligned}$$

若 $A_1 \neq 0$, 则 $\|A_1\| \neq 0$. 取 $\lambda_2 = \|A_1\| > 0$, 此时

$$|\lambda_1| = \|A\| \geqslant \|A|_{H_1}\| = \|A_1\| = |\lambda_2|.$$

由定理 5.3.5, λ_2 是特征值. 不妨设 $e_2 \in H_1$, $\|e_2\| = 1$, $A_1 e_2 = \lambda_2 e_2$,

$$Q_2 = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}, \qquad H_2 = \{x \in H : x \perp Q_2\},$$

此时同样有 $A(H_2) \subset H_2$. 若 $A_2 = A_1|_{H_2} = 0$, 类似于上面的证明

$$Ax = \lambda_1 (x, e_1) e_1 + \lambda_2 (x, e_2) e_2, \qquad \forall x \in H.$$

若 $A_2 \neq 0$, 继续以上过程作出 $A_3, \cdots$. 如果在有限次之后有 $A_n = 0$, 则

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i) e_i, \tag{5.3.9}$$

定理 5.3.6(1) 成立. 否则, $\{\lambda_n\}$ 是无穷的, 并且 $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots$. 由 Q_n 与 H_n 的定义, 对应的特征向量 $\{e_n\}$ 两两正交, 其中 $Ae_n = \lambda_n e_n$. 此时必有 $\lambda_n \to 0$. 若不然, 如 $|\lambda_n| \geqslant \delta > 0$ 对于无穷多个 n 成立, 由于 $Ae_n \perp Ae_m (n \neq m)$, 则

$$\begin{aligned}||Ae_n - Ae_m||^2 &= ||Ae_n||^2 + ||Ae_m||^2 \\ &= |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geqslant 2\delta^2 > 0,\end{aligned}$$

与 A 的紧性矛盾.

现在设 $Q_\infty = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geqslant 1\}$, $H_\infty = \{x \in H : x \perp Q_\infty\}$, 则 $A|_{H_\infty} = 0$. 实际上若 $x \in H_\infty$, 则 $x \perp Q_\infty$, 从而 $x \perp Q_n$, 于是 $x \in H_n (n \geqslant 1)$, $A(H_n) \subset H_n$, 由此得出

$$(Ax, x) = ((A|_{H_\infty})x, x) \leqslant ||A|_{H_n}|| \, ||x||^2 = |\lambda_n| \, ||x||^2 \to 0.$$

于是 $\forall x \in H_\infty$, $(Ax, x) = 0$. 将 A 看成Hilbert 空间 H_∞ 上的自共轭算子, 直接应用极化恒等式得到 $A|_{H_\infty} = 0$. $\forall x \in H$, 令 $x = q_\infty + h_\infty$, 其中 $q_\infty \in Q_\infty$, $h_\infty \in H_\infty$, 则

$$\begin{aligned}Ax = Aq_\infty + Ah_\infty &= A\left(\sum_{n=1}^{\infty} (q_\infty, e_n)e_n\right) + 0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (q_\infty, e_n)Ae_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (q_\infty, e_n)e_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n)e_n.\end{aligned}$$

(2) 设 P_n 是从 H 到由 e_n 张成的线性子空间上的投影算子, 则

$$P_n x = (x, e_n)e_n.$$

若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 只有有限多个, 由 (5.3.9)

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i)e_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) x,$$

于是

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i.$$

若 $\{\lambda_n\}$ 是无穷的, 则

$$\begin{aligned}\left\|A-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iP_i\right\|^2 &= \sup_{\|x\|=1}\left\|Ax-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iP_ix\right\|^2\\ &= \sup_{\|x\|=1}\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i(x,e_i)e_i\right\|^2\\ &\leqslant \sup_{\|x\|=1}\sum_{i=n+1}^{\infty}|\lambda_i|^2|(x,e_i)|^2\\ &\leqslant |\lambda_{n+1}|^2\sup_{\|x\|=1}\sum_{i=n+1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\\ &\leqslant |\lambda_{n+1}|^2\to 0,\end{aligned}$$

故

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_iP_i=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_iP_i.$$

(3) 若 0 不是 A 的特征值, 则 A 是一一映射. $\forall x\in H$, 若 $x\perp e_n(n=1,2,\cdots)$, 则 $Ax=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n=0$, 由此得到 $x=0$. 由定理 4.1.6(6), $\{e_n:n\geqslant 1\}$ 是 H 的正交基.

例 5.3.2 对于第二型 Fredholm 积分方程

$$x(t)=\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s+y(t), \tag{5.3.10}$$

其中 K 作为二元函数在 $a\leqslant t,s\leqslant b$ 上平方可积, $y\in L^2[a,b]$, $\lambda\neq 0$. (5.3.10) 可以简记为

$$(I-\lambda A)x=y \tag{5.3.11}$$

(或 $(\lambda^{-1}I-A)x=\lambda^{-1}y$)), 其中

$$Ax(t)=\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\qquad \forall x\in L^2[a,b],$$

即是第二型 Fredholm 积分算子. 由 3.3 节的知识, A 是紧算子. 当 $K(s,t)=\overline{K(t,s)}$ 时, A 是自伴算子. 现在假定 A 是非零自伴算子.

由于 A 是紧的, 根据 5.2 节的知识, 要么 (5.3.11) 对于任何 $y\in L^2[a,b]$ 有唯一解, 要么齐次方程 $(I-\lambda A)x=0$ 有非零解. 在前一种情况, 根据自伴性存在至多可列多个实数 $\lambda_n\neq\lambda$, λ_n 是 A 的特征值, 以及相应的特征向量 φ_n. 利用正交化方

法, 不妨设 $\{\varphi_n : n \geqslant 1\}$ 就是规范正交系, 显然 $\{\varphi_n; n \geqslant 1\}$ 还是正交基. 于是由定理 5.3.6

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty}(Ax, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x, \varphi_n)\varphi_n, \qquad \forall x \in L^2[a,b],$$

其中级数按照 L^2 中范数收敛. 将 (5.3.11) 两端关于 φ_n 取内积得到

$$(1-\lambda\lambda_n)(x, \varphi_n) = (y, \varphi_n) \quad \text{或} \quad (x, \varphi_n) = (1-\lambda\lambda_n)^{-1}(y, \varphi_n),$$

所以

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\lambda\lambda_n)^{-1}(y, \varphi_n)\varphi_n$$

是 (5.3.11) 的解.

在第二种情况, 对应地有有限个 $\lambda_n\lambda = 1$ 并且相应地 $(y, \varphi_n) = 0$, 直接验证表明形如

$$\varphi = \sum_{\lambda\lambda_n=1} c_n\varphi_n + \sum_{\lambda\lambda_n\neq 1}(1-\lambda\lambda_n)^{-1}(y, \varphi_n)\varphi_n$$

的函数都是 (5.3.11) 的解, 其中 c_n 是任意常数.

5.4　谱系与谱分解

定义 5.4.1　设 H 是Hilbert 空间, $\{T_\lambda : -\infty < \lambda < +\infty\}$ 是一族投影算子, 满足

(1) 若 $\lambda \leqslant \mu$, 则 $T_\lambda \leqslant T_\mu$(单调性).

(2) $\forall\lambda_0$, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0} T_\lambda x = T_{\lambda_0}x$, $\quad \forall x \in H$(右连续性).

(3) 存在实数 a, b, $T_a = 0$, $T_b = I$.

则称 $\{T_\lambda\}$ 是一个谱系或单位分解.

命题 5.4.1　设 $\{T_\lambda\}$ 是谱系, 则

(1) 当 $\lambda \leqslant \mu$ 时, $T_\lambda T_\mu = T_\mu T_\lambda = T_\lambda$.

(2) 设 $\Delta = (\alpha, \beta]$, $T_\Delta = T_\beta - T_\alpha$, 则 T_Δ 也是投影算子.

(3) 若 Δ_1, Δ_2 是如 (2) 中的半开区间, 并且 $\Delta_1 \bigcap \Delta_2 = \Delta$, 则 $T_{\Delta_1}T_{\Delta_2} = T_\Delta$.

(4) $\forall\lambda_0$, 存在投影算子 T 使得 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0} T_\lambda x = Tx$, $\forall x \in H$.

(5) $\forall x, y \in H$, $F_{x,y}(\lambda) = (T_\lambda x, y)$ 是在 $[a, b]$ 上关于 λ 的有界变差函数.

证明　(1) 这里的 (1), (2) 可由定理 4.2.5 直接得出.

(2) 若 $\Delta_1=(\alpha_1,\beta_1],\Delta_2=(\alpha_2,\beta_2]$, 如果 $\Delta_1\bigcap\Delta_2=(\alpha_1,\beta_2]$(其他情况类似证之), 则 $\alpha_2\leqslant\alpha_1<\beta_2\leqslant\beta_1$. 实际计算知道

$$\begin{aligned}T_{\Delta_1}T_{\Delta_2}&=(T_{\beta_1}-T_{\alpha_1})(T_{\beta_2}-T_{\alpha_2})\\&=T_{\beta_1}T_{\beta_2}-T_{\beta_1}T_{\alpha_2}-T_{\alpha_1}T_{\beta_2}+T_{\alpha_1}T_{\alpha_2}\\&=T_{\beta_2}-T_{\alpha_1}-T_{\alpha_2}+T_{\alpha_2}\\&=T_{\beta_2}-T_{\alpha_1}=T_{\Delta},\end{aligned}$$

于是 (3) 成立.

(3) 任取单调序列 $\{\lambda_n\},\lambda_n<\lambda_{n+1},\lambda_n\to\lambda_0$, 由 (2) 知道 $T_{\lambda_{n+1}}-T_{\lambda_n}$ 是投影算子. 由 (3), $m\neq n$ 时, $(T_{\lambda_{m+1}}-T_{\lambda_m})$ 与 $(T_{\lambda_{n+1}}-T_{\lambda_n})$正交. 由定理 4.2.7(1), $\lim\limits_{n\to\infty}T_{\lambda_n}x$ 存在. $\{\lambda_n\}$ 是任意的, 故 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}T_\lambda x$ 存在, 此即 (4).

(4) 任取分点 $a=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=b$, 记 $\Delta_k=(\lambda_k,\lambda_{k+1}],k=0,1,\cdots,n-1$, 则 $T_{\Delta_k}=T_{\lambda_{k+1}}-T_{\lambda_k}$ 是投影算子, $T_{\Delta_k}T_{\Delta_i}=0\ (i\neq k)$, 从而

$$\sum_{k=0}^{n-1}||T_{\Delta_k}x||^2=\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1}T_{\Delta_k}x\right|\right|^2=||x||^2.$$

由此得出

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}|(T_{\lambda_{k+1}}x,y)-(T_{\lambda_k}x,y)|\\=&\sum_{k=0}^{n-1}|(T_{\Delta_k}x,y)|=\sum_{k=0}^{n-1}|(T_{\Delta_k}^2x,y)|\\=&\sum_{k=0}^{n-1}|(T_{\Delta_k}x,T_{\Delta_k}y)|\\\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}||T_{\Delta_k}x||\,||T_{\Delta_k}y||\\\leqslant&\left(\sum_{k=0}^{n-1}||T_{\Delta_k}x||^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{k=0}^{n-1}||T_{\Delta_k}y||^2\right)^{\frac12}\\\leqslant&||x||\,||y||,\end{aligned}$$

所以

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(F_{xy})\leqslant||x||\,||y||. \tag{5.4.1}$$

定理 5.4.1　投影算子族 $\{T_\lambda\}$ 是谱系当且仅当存在 $a,b\in(-\infty,\infty)$, 对于每个 $x\in X$, $Q_x(\lambda)=(T_\lambda x,x)\in V_0[a,b]$, $Q_x(\lambda)$ 右连续, 随 λ 单调递增并且 $Q_x(b)=\|x\|^2$.

证明　(1) 若 $\{T_\lambda\}$ 是谱系, 由上述命题, $Q_x(\lambda)$ 满足所说的条件.

(2) 反过来, $Q_x(\lambda)$ 的单调性即是 T_λ 的单调性. 由 $Q_x(\lambda)$ 右连续,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}\|(T_\lambda-T_{\lambda_0})x\|^2&=\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}((T_\lambda-T_{\lambda_0})x,x)\\&=\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}[Q_x(\lambda)-Q_x(\lambda_0)]=0,\end{aligned}$$

即 $\{T_\lambda\}$ 右连续. 最后由

$$Q_x(b)=(T_bx,x)=\|x\|^2=(x,x)$$

知道 $T_b=I$, 故 $\{T_\lambda\}$ 是谱系.

例 5.4.1　设 H 是Hilbert 空间, $\{P_i\}$ 是一列两两正交的投影算子, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P_i=I$. 对于任一列实数 $\{\lambda_i\}$, $a<\lambda_i\leqslant b$. 令

$$T_\lambda=\begin{cases}0, & \lambda\leqslant a,\\ \sum\limits_{\lambda_i\leqslant\lambda}P_i, & \lambda>a.\end{cases}$$

则 $\{T_\lambda\}$ 是谱系.

实际上, T_λ 是有限多个或可列多个两两正交投影算子之和. 由定理 4.2.6, 定理 4.2.7, T_λ 是投影算子, 并且当 $\lambda\leqslant\mu$ 时, $T_\mu-T_\lambda=\sum\limits_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}P_i\geqslant 0$. $\{T_\lambda\}$ 单调增加.

若 $\lambda>\lambda_0$, 则 $T_\lambda-T_{\lambda_0}=\sum\limits_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}P_i$, $\forall x\in H$,

$$\left\|\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}P_ix\right\|^2=\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}\|P_ix\|^2\leqslant\sum_{i=m_\lambda}^{\infty}\|P_ix\|^2,$$

其中 $m_\lambda=\inf\{i:\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda\}$. 显然当 $\lambda\to\lambda_0+0$ 时, $m_\lambda\to\infty$. 注意到级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|P_ix\|^2\leqslant\|x\|^2$收敛, 故

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}\left\|\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}P_ix\right\|=0 \text{ 或 } \lim_{\lambda\to\lambda_0+0}\sum_{\lambda_0<\lambda_i\leqslant\lambda}P_ix=0,$$

$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}T_\lambda x=T_{\lambda_0}x$. 于是 $\{T_\lambda\}$ 是右连续的.

由 T_λ 的定义知道 $T_a = 0, T_b = I$, 故 $\{T_\lambda\}$ 是谱系.

例 5.4.2 考虑算子族 $\{T_\lambda\}$, $T_\lambda : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$, $T_\lambda f = \chi_\lambda f$, 其中 χ_λ 是 $(-\infty, \lambda]$ 的特征函数, 则 $\{T_\lambda\}$ 是谱系.

首先, 每个 T_λ 是投影算子. 实际上, $\forall f,g \in L^2[a,b]$, $T_\lambda^2 f = \chi_\lambda\chi_\lambda f = \chi_\lambda f$, 故 $T_\lambda^2 = T_\lambda$. 其次,

$$(T_\lambda f, g) = \int_a^b \chi_\lambda f\bar{g}\mathrm{d}t = \int_a^b f\overline{\chi_\lambda g}\mathrm{d}t = (f, T_\lambda g),$$

T_λ 是幂等的和自伴的, 故为投影算子.

若 $\lambda \leqslant \mu$, 则

$$\begin{aligned}(T_\mu f, f) - (T_\lambda f, f) &= \int_a^b \chi_\mu |f|^2\mathrm{d}t - \int_a^b \chi_\lambda |f|^2\mathrm{d}t \\ &= \int_\lambda^\mu |f|^2\mathrm{d}t \geqslant 0,\end{aligned}$$

这说明 $\{T_\lambda\}$ 是单调的. 取 $\lambda > \lambda_0$, 则 $||(T_\lambda - T_{\lambda_0})f||^2 = \int_{\lambda_0}^\lambda |f|^2\mathrm{d}t$. 由积分的绝对连续性, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+} ||(T_\lambda - T_{\lambda_0})f||^2 = 0$. $\{T_\lambda\}$ 右连续.

由定义容易知道 $T_a = 0$. 而 $||T_b f||^2 = \int_a^b |f|^2\mathrm{d}t = ||f||^2$, 即 $(T_b f, f) = (f, f)$, 故 $T_b = I$.

定理 5.4.2 设 $\{T_\lambda\}$ 是谱系, $f(\lambda)$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数, 则存在算子 $T \in B(H)$, 使得

$$(Tx, y) = \int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x, y), \qquad \forall x, y \in H. \tag{5.4.2}$$

若 $f(\lambda)$ 是实函数, 则 T 是自伴算子.

证明 $\forall x, y \in H$, 由于 $(T_\lambda x, y)$ 是 λ 的有界变差函数, Lebesgue-Stieltjes 积分 $\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x, y)$ 存在. 令

$$\varphi(x, y) = \int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x, y), \tag{5.4.3}$$

容易验证 $\varphi(x,y)$ 是一 · 五线性泛函. 若 $|f(t)| \leqslant M, \forall t \in [a,b]$, 则

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \int_a^b |f(\lambda)|\, ||\mathrm{d}(T_\lambda x, y)|| \leqslant M \bigvee_a^b(\alpha_{xy}) \leqslant M||x||\,||y||,$$

故

$$||\varphi|| \leqslant \sup\{|\varphi(x,y)| : ||x|| \leqslant 1, ||y|| \leqslant 1\} \leqslant M,$$

φ 是有界的. 由定理 4.3.3, 存在 $T\in B(H)$, 使得 $\varphi(x,y)=(Tx,y)$, $\forall x,y\in H$, 即

$$(Tx,y)=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y),\qquad \forall x,y\in H.$$

若 $f(\lambda)$ 是实函数, 注意到 T_λ 是投影算子, 故

$$\overline{\varphi(x,y)}=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}\overline{(x,T_\lambda y)}=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda y,x)=\varphi(y,x),$$

φ 是对称的, T 是自伴算子. 证毕.

对于定理 5.4.2 中的 T, 今后记为 $T=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$.

定义 5.4.2　称 $T=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$ 是 f 关于谱系 $\{T_\lambda\}$ 的谱积分. 特别地, 若 $f(\lambda)=\lambda$, 称 $T=\int_a^b \lambda\mathrm{d}T_\lambda$ 是算子 T 的谱分解式或谱表现.

定理 5.4.3　若 $f,g\in C[a,b]$, $\alpha,\beta\in\varPhi$, 则

(1) $\left\|\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\right\|\leqslant\|f\|$, 其中 $\|f\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|$.　　(5.4.4)

(2) $\int_a^b [f(\lambda)+g(\lambda)]\mathrm{d}T_\lambda=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda+\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$.　　(5.4.5)

(3) 若 $\|f_n-f\|\to 0$, 则在 $B(H)$ 的范数意义下

$$\int_a^b f_n(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\to\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda. \tag{5.4.6}$$

(4) $\int_a^b \alpha f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda=\alpha\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$, $\alpha\in\varPhi$.　　(5.4.7)

(5) $\left(\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\right)^*=\int_a^b \overline{f(\lambda)}\mathrm{d}T_\lambda$.　　(5.4.8)

(6) 对于每个区间 $(\alpha,\beta]$, $\int_\alpha^\beta \mathrm{d}T_\lambda=T_\beta-T_\alpha$.

(7) $\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$,　　(5.4.9)

并且右端两个算子可交换.

证明　(1) 设 $T=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$, 则 $\forall x,y\in H$,

$$(Tx,y)=\varphi(x,y)=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x,y).$$

由定理 4.3.3 以及上面命题 (5) 及其证明,

$$\begin{aligned}||T|| = ||\varphi|| &= \sup\{|\varphi(x,y)| : ||x|| \leqslant 1, ||y|| \leqslant 1\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x, y)\right| : ||x|| \leqslant 1, ||y|| \leqslant 1\right\} \\ &\leqslant \sup\{\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha_{xy}) : ||x|| \leqslant 1, ||y|| \leqslant 1\}||f|| \leqslant ||f||.\end{aligned}$$

(2) (5.4.5) 与 (5.4.7) 是容易验证的, (5.4.6) 由 (5.4.4), (5.4.5) 得到.

(3) $\forall x, y \in H$, 由 $\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda$ 的定义,

$$\begin{aligned}\overline{\left(\left(\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\right)x, y\right)} &= \overline{\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_\lambda x, y)} \\ = \int_a^b \overline{f(\lambda)}\mathrm{d}\overline{(T_\lambda x, y)} &= \int_a^b \overline{f(\lambda)}\mathrm{d}(T_\lambda y, x) \\ = \left(\int_a^b \overline{f(\lambda)}\mathrm{d}T_\lambda y, x\right) &= \overline{\left(x, \int_a^b \overline{f(\lambda)}\mathrm{d}T_\lambda y\right)},\end{aligned}$$

从而 $\left(\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\right)^* = \int_a^b \overline{f(\lambda)}\mathrm{d}T_\lambda.$

(4) $\forall x, y \in H$, 注意到 $(T_\lambda x, x)$ 的单调性和连续性,

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b \mathrm{d}T_\lambda x, x\right) &= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}(T_\lambda x, x) \\ &= (T_\beta x, x) - (T_\alpha x, x) = ((T_\beta - T_\alpha)x, x),\end{aligned}$$

这里 $f(\lambda) = 1$ 是实函数, 故 $\int_a^b \mathrm{d}T_\lambda$ 是自伴的. 同样地, $\int_\alpha^\beta \mathrm{d}T_\lambda = (T_\beta - T_\alpha)$ 是自伴的. 再由上式得到

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}T_\lambda = T_\beta - T_\alpha.$$

(5) 若 $f(\lambda), g(\lambda)$ 是阶梯函数, 如有

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b, \qquad a = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_m = b,$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \chi_{\Delta_i}, \qquad \Delta_i = (\alpha_i, \alpha_{i+1}],$$

$$g(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j \chi_{\Delta'_j}, \qquad \Delta'_j = (\beta_j, \beta_{j+1}].$$

记 $\Delta_{ij}=\Delta_i\bigcap\Delta'_j$, 由 (4),

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda &= \sum_{i,j}\int_{\Delta_{ij}} f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\\ &= \sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\int_{\Delta_{ij}}\mathrm{d}T_\lambda=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j T_{\Delta_{ij}}\\ &= \sum_{i,j}\alpha_i\beta_j T_{\Delta_i}T_{\Delta'_j}=\left(\sum_i\alpha_i T_{\Delta_i}\right)\left(\sum_j\beta_j T_{\Delta'_j}\right)\\ &= \int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda.\end{aligned}$$

同样地, 由于 $T_{\Delta_i}T_{\Delta'_j}=T_{\Delta'_j}T_{\Delta_i}$ ，又可得到

$$\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda=\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda.$$

对于 $f,g\in C(a,b]$, 取阶梯函数列 f_n,g_m 使得 $||f_n-f||\to 0$, $||g_m-g||\to 0$. 不妨设 $||f_n||\leqslant M$, $||g_m||\leqslant M$, 则

$$||f_ng_m-fg||\leqslant M||f_n-f||+M||g_m-g||\to 0\qquad(n,m\to\infty).$$

对于等式

$$\int_a^b f_n(\lambda)g_m(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda=\int_a^b f_n(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\int_a^b g_m(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda,$$

两端取极限, 由 (5.4.6) 知道

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda &= \lim_{m,n\to\infty}\int_a^b f_n(\lambda)g_m(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\lim_{m\to\infty}\int_a^b g_m(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\\ &= \int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda.\end{aligned}$$

由阶梯函数情况的交换性知道后面两个算子是可交换的.

定义 5.4.3　设 H 是Hilbert 空间, 称线性算子 $T:H\to H$ 是正算子. 若 $(Tx,x)\geqslant 0$, $\forall x\in H$. 记为 $T\geqslant 0$.

定理 5.4.4　设 T 是自伴的正算子, 则

(1) $\forall S\in B(H)$, $S\geqslant 0$, 也有 $T+S\geqslant 0$.

(2) $\alpha \geqslant 0$ 时, $\alpha T \geqslant 0$.

(3) 对于任一自然数 n, $T^n \geqslant 0$.

(4) 存在唯一的 $S \geqslant 0$, 使得 $S^2 = T$, 并且若 $BT = TB$, 则 $BS = SB$(称 S 为 T 的正方根, 记为 $S = T^{\frac{1}{2}}$).

(5) 若 $T' \geqslant 0, TT' = T'T$, 则 $TT' \geqslant 0$.

证明 (1) 由定义, (1),(2) 显然.

(2) 若 $n = 2k$ 是偶数, 由 T 的自伴性 $(T^n x, x) = (T^k x, T^k x) \geqslant 0$. 若 $n = 2k+1$ 为奇数, 则 $(T^n x, x) = (T(T^k x), T^k x) \geqslant 0$, 故 $T^n \geqslant 0$. 此即 (3).

(3) 为证 (4), 不妨设 $\|T\| \leqslant 1$, 则 $0 \leqslant I - T \leqslant I$, $\|I - T\| \leqslant 1$. 取

$$A_1 = \frac{1}{2}(I - T),\ A_2 = \frac{1}{2}(I - T + A_1^2), \cdots, A_{n+1} = \frac{1}{2}(I - T + A_n^2). \tag{5.4.10}$$

现在 $\|A_1\| \leqslant 1$. 归纳地, 若 $\|A_n\| \leqslant 1$, 则

$$\|A_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{2}(\|I - T\| + \|A_n\|^2) \leqslant 1,$$

所以 $\forall n \geqslant 1$, $\|A_n\| \leqslant 1$.

$I - T$ 是正算子, A_n 是关于 $I - T$ 的正系数多项式, 从 (1),(2),(3) 不难知道, A_n 皆为正算子并且 $A_n A_{n-1} = A_{n-1} A_n$. 显然 $A_2 - A_1$ 是 $I - T$ 的正系数多项式. 又若 $A_n - A_{n-1}$ 是 $I - T$ 的正系数多项式, 则由

$$A_n - A_{n-1} = \frac{1}{2}(A_n + A_{n-1})(A_n - A_{n-1}), \tag{5.4.11}$$

$A_{n+1} - A_n$ 是 $I - T$ 的正系数多项式. 仍由数学归纳法知道, $A_{n+1} \geqslant A_n$ $(n \geqslant 1)$, $\{A_n\}$ 是单调增加序列.

现在 $\forall x \in X$, $(A_n x, x)$ 单调上升并且

$$|(A_n x, x)| \leqslant \|A_n\|\,\|x\|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

故极限 $\lim\limits_{n \to \infty} (A_n x, x)$ 存在, 于是 $\lim\limits_{n,m \to \infty} ((A_n - A_m)x, x) = 0$. 利用 5.3 节不等式 (5.3.5) 得到

$$\|A_n - A_m\|^4 \leqslant \|A_n - A_m\|^3 \|x\|^2 |((A_n - A_m)x, x)|,$$

故 $\{A_n x\}$ 是Cauchy 序列. H 完备, 从而 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n x$ 存在 , $\forall x \in H$. 由 Banach-Steinhaus 定理, 存在 $A \in B(H)$, $\lim\limits_{n \to \infty} A_n x = Ax$, $\forall x \in H$ 成立并且 $\|A\| \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} \|A_n\| \leqslant 1$.

由于 $(A_nx,x)\geqslant 0$, 故 $(Ax,x)=\lim\limits_{n\to\infty}(A_nx,x)\geqslant 0$, 所以 $A\geqslant 0$. 又

$$A_{n+1}x=\frac{1}{2}(I-T+A_n^2)x,$$

令 $n\to\infty$, 两端取极限得到

$$Ax=\frac{1}{2}(I-T+A^2)x \quad 或 \quad A=\frac{1}{2}(I-T+A^2),$$

记 $I-A=S$, 则 $S\geqslant 0$. S 是自伴的, 并且由上式得到

$$T=(I-A)^2=S^2.$$

A_n 是关于 $I-T$ 的多项式, 当 B 与 T 可交换时, B 与每个 A_n 可交换, 从而 B 与 A 可交换, 所以 B 与 S 可交换.

最后, S 是唯一的. 实际上, 若另有 $S_1^2=T$, 则 S, S_1 可交换, $\forall x\in H$, $y=(S_1-S)x$, 则

$$\begin{aligned}0=((S_1^2-S^2)x,y)&=((S_1+S)(S_1-S)x,y)\\&=((S_1+S)y,y)=(S_1y,y)+(Sy,y).\end{aligned}$$

但 $S_1,S\geqslant 0$, 故必有 $(S_1y,y)=(Sy,y)=0$. 若 S_1' 是 S_1 的正方根, S' 是 S 的正方根, 则

$$(S_1y,y)=(S_1'y,S_1'y)=0,\qquad (Sy,y)=(S'y,S'y)=0,$$

从而 $S_1'y=S'y=0$, 故

$$\begin{aligned}\|y\|^2=(y,y)&=((S_1-S)x,y)\\&=(S_1x,y)-(Sx,y)\\&=(S_1'x,S_1'y)-(S'x,S'y)=0,\end{aligned}$$

即 $y=0$. 所以 $Sx=S_1x$, $\forall x\in H$, 即 $S=S_1$.

(4) 设 $T=S^2$, 则 $ST'=T'S$, 从而

$$(TT'x,x)=(ST'x,Sx)=(T'(Sx),Sx)\geqslant 0,$$

故 $TT'\geqslant 0$. (5) 得证.

定理 5.4.5 设 H 是Hilbert 空间, $T\in B(H)$ 是自伴算子, 则存在谱系 $\{T_\lambda\}$, 使得当 $-\infty<\lambda<m$ 时, $T_\lambda=0$; 当 $M\leqslant\lambda<\infty$ 时, $T_\lambda=I$, 并且 $\forall\varepsilon>0$,

$$T=\int_{m-\varepsilon}^{M}\lambda\mathrm{d}T_\lambda, \tag{5.4.12}$$

其中 M, m 如同定理 5.3.4.

证明 若 $M = m$, 则 $T - mI \geqslant 0$, $MI - T \geqslant 0$. 于是 $T = mI = MI$. 此时取

$$T_\lambda = \begin{cases} 0, & \lambda < m, \\ I, & \lambda \geqslant m \end{cases}$$

即可. 以下设 $m < M$.

$\forall \lambda \in (-\infty, +\infty)$, 设 $A_\lambda = T - \lambda I$, S_λ 是 A_λ^2 的正方根, N_λ 是 $(A_\lambda + S_\lambda)$ 的零空间. 则 N_λ 是闭线性子空间. 定义

$$T_\lambda = \begin{cases} 0, & \lambda < m, \\ \text{从}H\text{到}N_\lambda\text{上的投影算子}, & m \leqslant \lambda < M, \\ I, & \lambda \geqslant M. \end{cases}$$

我们证明 $\{T_\lambda\}$ 即所求的谱系.

(1) 首先 T_λ, T_μ 是可交换的. 实际上对于任一算子 A, 若 A 与 T 可交换, 则 A 与 T_λ 可交换. 例如, 由 T_λ 的定义, $\forall x \in H, (A_\lambda + S_\lambda)T_\lambda x = 0$. 若 A 与 T 可交换, 则 A 与 A_λ 可交换, 从而与 S_λ 可交换. 于是

$$(A_\lambda + S_\lambda)AT_\lambda x = A(A_\lambda + S_\lambda)T_\lambda x = 0.$$

故 $AT_\lambda x \in N_\lambda$. $T_\lambda AT_\lambda x = AT_\lambda x$ 或 $T_\lambda AT_\lambda = AT_\lambda$.

又由 $A_\lambda A = AA_\lambda$ 并且 T 是自伴的可得 $A_\lambda A^* = A^* A_\lambda$. 由类似的证明知道 $T_\lambda A^* T_\lambda = A^* T_\lambda$. 两边取共轭得到 $T_\lambda AT_\lambda = T_\lambda A$, 故 $AT_\lambda = T_\lambda A$. 同样地, 当 A 与 T 可交换时, A 与 T_μ 可交换. 最后 T_μ 与 T_λ 可交换.

(2) $\{T_\lambda\}$ 是单调的, 假定 $\lambda > \mu, \lambda, \mu \in [m, M)$. 由上面所证, $(A_\lambda + S_\lambda)T_\lambda = 0$, 故

$$A_\lambda T_\lambda = -S_\lambda T_\lambda \leqslant 0. \tag{5.4.13}$$

这是因为 S_λ, T_λ 都是正算子. 又 $0 = A_\lambda^2 - S_\lambda^2 = (A_\lambda + S_\lambda)(A_\lambda - S_\lambda)$, 故 $\forall x \in H$, $(A_\lambda - S_\lambda)x \in N_\lambda$. $T_\lambda(A_\lambda - S_\lambda)x = (A_\lambda - S_\lambda)x$ 或 $T_\lambda(A_\lambda - S_\lambda) = (A_\lambda - S_\lambda)$, 即

$$A_\lambda(I - T_\lambda) = S_\lambda(I - T_\lambda) \geqslant 0. \tag{5.4.14}$$

对于 $x \in H$, 令 $y = T_\mu(I - T_\lambda)x$, 我们证明 $y = 0$. 则由 $y \in N_\mu$ 知 $T_\mu y = y$. 又 $y = (I - T_\lambda)T_\mu x$, $I - T_\lambda$ 仍为投影算子, 故 $(I - T_\lambda)y = y$. 于是由 (5.4.13),

$$(A_\mu y, y) = (A_\mu T_\mu y, y) \leqslant 0.$$

另一方面由 (5.4.14),

$$(A_\lambda y, y) = (A_\lambda(I - T_\lambda)y, y) \geqslant 0,$$

从而 $(A_\mu y, y) \leqslant (A_\lambda y, y)$, 即 $(\lambda - \mu)(y, y) \leqslant 0$. 但 $\lambda > \mu$, 故 $(y, y) = 0$, $y = 0$, 从而

$$T_\mu = T_\mu T_\lambda.$$

由定理 4.2.5, $T_\mu \leqslant T_\lambda$.

(3) $\{T_\lambda\}$ 右连续, 设 $\lambda > \mu, m \leqslant \lambda < M$, 记 $T_{\Delta_\lambda} = T_\lambda - T_\mu$, 我们证明 $Bx = \lim\limits_{\lambda \to \mu+0} T_{\Delta_\lambda} x$点点存在并且为 0. 实际上当 λ 减小时, T_{Δ_λ} 下降并且有界, 故上面极限存在.

实际计算知道

$$T_\lambda T_{\Delta_\lambda} = T_\lambda(T_\lambda - T_\mu) = T_{\Delta_\lambda}.$$

故由 $T_{\Delta_\lambda} \geqslant 0$ 及 (5.4.13), $A_\lambda T_{\Delta_\lambda} = A_\lambda T_\lambda T_{\Delta_\lambda} \leqslant 0$. 又

$$(I - T_\mu)T_{\Delta_\lambda} = (I - T_\mu)(T_\lambda - T_\mu) = T_{\Delta_\lambda},$$

故由 (5.4.14), $A_\mu T_{\Delta_\lambda} = A_\mu(I - T_\mu)T_{\Delta_\lambda} \geqslant 0$. 于是

$$\mu T_{\Delta_\lambda} \leqslant T T_{\Delta_\lambda} \leqslant \lambda T_{\Delta_\lambda}. \tag{5.4.15}$$

令 $\lambda \to \mu + 0$ 得到 $TB = \mu B$ 或 $A_\mu B = 0$. 对于 $x \in H$, 令 $y = Bx$, 则 $A_\mu y = A_\mu Bx = 0$, 从而

$$||S_\mu y||^2 = (S_\mu^2 y, y) = (A_\mu^2 y, y) = (A_\mu y, A_\mu y) = 0.$$

所以

$$(A_\mu + S_\mu)y = A_\mu y + S_\mu y = 0.$$

这说明 $y \in N_\mu$, $T_\mu y = y$. $T_\mu Bx = \lim\limits_{\lambda \to \mu+} T_\mu T_{\Delta\lambda} x = \lim\limits_{\lambda \to \mu+} T_\mu(T_\lambda - T_\mu)x = 0$, 即 $T_\mu B = 0$, 所以 $y = T_\mu y = T_\mu Bx = 0$. 于是 $B = 0$, $\{T_\lambda\}$ 是谱系.

(4) 为验证 $T = \displaystyle\int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda \mathrm{d}T_\lambda$, 只需验证

$$(Tx, x) = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda \mathrm{d}(T_\lambda x, x), \qquad \forall x \in H.$$

对于任意分划 $m-\varepsilon=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_m=M$, 记 $\Delta_k=(\lambda_k,\lambda_{k+1}]$, $T_{\Delta_k}=T_{\lambda_{k+1}}-T_{\lambda_k}$, 由 (5.4.15),

$$\lambda_k(T_{\Delta_k}x,x)\leqslant(TT_{\Delta_k}x,x)\leqslant\lambda_{k+1}(T_{\Delta_k}x,x),$$

于是

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_kT_{\Delta_k}x,x\right)\leqslant(Tx,x)\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{k+1}T_{\Delta_k}x,x\right).$$

这里利用了 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}T_{\Delta_k}=I$. 因此

$$0\leqslant(Tx,x)-\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_kT_{\Delta_k}x,x\right)\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)T_{\Delta_k}x,x\right)$$

$$\leqslant\max_k|\lambda_{k+1}-\lambda_k|\left(\sum_{k=0}^{n-1}T_{\Delta_k}x,x\right)=\max_k|\lambda_{k+1}-\lambda_k|\,\|x\|^2.$$

记 χ_{Δ_k} 是 $(\lambda_k,\lambda_{k+1}]$ 的特征函数, $f_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k\chi_{\Delta_k}$, $f(\lambda)=\lambda$, 则 $\max\limits_k|\lambda_{k+1}-\lambda_k|\to0$ 时, $\|f_n-f\|\to0$. 由定理 5.4.3(2),

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_kT_{\Delta_k}=\int_{m-\varepsilon}^{M}f_n(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda\to\int_{m-\varepsilon}^{M}\lambda\mathrm{d}T_\lambda.$$

于是 (5.4.12) 成立. 证毕.

(5.4.12) 通常记为

$$T=\int_{m-0}^{M}\lambda\mathrm{d}T_\lambda. \tag{5.4.16}$$

由定理 5.4.3 和定理 5.4.5, 对于自伴算子 $T\in B(H)$, 若 $f(\lambda)$ 是关于 λ 的多项式或连续函数, 则下面关于算子函数的表达式成立：

$$f(T)=\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}T_\lambda.$$

例如, 我们有

$$e^T=\int_{m-0}^{M}e^\lambda\mathrm{d}T_\lambda,\quad \sin T=\int_{m-0}^{M}\sin\lambda\,\mathrm{d}T_\lambda.$$

关于 e^T, $\sin T$ 的含义我们已在 5.1 节做过解释.

下面定理表明了谱系和谱分解在研究算子的谱性质方面的重要作用.

定理 5.4.6　设 H 是Hilbert 空间, $T \in B(H)$ 是自伴算子, $\{T_\lambda\}$ 是定理 5.4.5 中所说的与 T 相应的谱系, $\lambda_0 \in C$. 则

(1) $\lambda_0 \in \rho(T)$ 当且仅当下列情况之一成立:

① $\lambda_0 \overline{\in} [m, M]$;

② $\lambda_0 \in [m, M]$ 并且存在 $[\alpha, \beta] \subset [m, M]$, $\alpha < \beta$, 使得 T_λ 在 $[\alpha, \beta]$ 上为常值.

(2) $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ 当且仅当 λ_0 是 T_λ 的间断点, 即 $T_{\lambda_0} \neq T_{\lambda_0 - 0}$, 此时特征向量空间 $N(\lambda_0 I - T) = R(T_{\lambda_0} - T_{\lambda_0 - 0})$.

(3) $\lambda_0 \in \sigma_c(T)$ 当且仅当 λ_0 是 T_λ 的连续点并且对于任何 $\alpha < \lambda_0 < \beta$, $T_\alpha \neq T_\beta$.

证明　(1) 设 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 则 $(\lambda_0 I - T)^{-1} \in B(H)$, 不妨记 $||(\lambda_0 I - T)^{-1}|| = a$. 若 $\lambda_0 \in [m, M]$, 取 $[\alpha, \beta]$ 使得 $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$ 并且 $0 < \beta - \alpha < \dfrac{1}{2a}$. $\{T_\lambda\}$ 为谱系, 实际计算可知 $\forall \delta > 0$,

$$\lambda_0 I - T = \int_{m-\delta}^{M} (\lambda_0 - \lambda) \mathrm{d}T_\lambda.$$

由定理 5.4.5 的证明知道 T_β, T_α 与 T 可交换, 故

$$\begin{aligned}
T_\beta - T_\alpha &= (\lambda_0 I - T)^{-1}(\lambda_0 I - T)(T_\beta - T_\alpha) \\
&= (\lambda_0 I - T)^{-1}(T_\beta - T_\alpha)(\lambda_0 I - T) \\
&= (\lambda_0 I - T)^{-1} \int_\alpha^\beta \mathrm{d}T_\lambda \int_{m-\delta}^{M} (\lambda_0 - \lambda) \mathrm{d}T_\lambda \\
&= (\lambda_0 I - T)^{-1} \int_{m-\delta}^{M} \chi_{[\alpha,\beta]} \mathrm{d}T_\lambda \int_{m-\delta}^{M} (\lambda_0 - \lambda) \mathrm{d}T_\lambda \\
&= (\lambda_0 I - T)^{-1} \int_\alpha^\beta (\lambda_0 - \lambda) \mathrm{d}T_\lambda,
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
||T_\beta - T_\alpha|| &\leqslant \left||(\lambda_0 I - T)^{-1}\right|| \left|\left| \int_\alpha^\beta (\lambda_0 - \lambda) \mathrm{d}T_\lambda \right|\right| \\
&\leqslant a \max(|\beta - \lambda_0|, |\lambda_0 - \alpha|) ||T_\beta - T_\alpha|| \\
&\leqslant \frac{1}{2} ||T_\beta - T_\alpha|| \quad .
\end{aligned}$$

于是 $T_\beta = T_\alpha$, $\{T_\lambda\}$ 是单调的. 故 T_λ 在 $[\alpha, \beta]$ 中取常值.

反之, 若 $\lambda_0 \overline{\in} [m, M]$, 则当 δ 足够小时, $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1}$ 是 $[m - \delta, M]$ 上的连续函数, 于是 $B = \displaystyle\int_{m-\delta}^{M} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} \mathrm{d}T_\lambda \in B(H)$. 但

$$(\lambda_0 I - T)B = \int_{m-\delta}^{M} (\lambda_0 - \lambda) \mathrm{d}T_\lambda \int_{m-\delta}^{M} \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} \mathrm{d}T_\lambda = \int_{m-\delta}^{M} \mathrm{d}T_\lambda = I.$$

同样地

$$B(\lambda_0 I - T) = \int_{m-\delta}^{M} \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} \mathrm{d}T_\lambda \int_{m-\delta}^{M} (\lambda_0 - \lambda) \mathrm{d}T_\lambda = I,$$

所以 $B = (\lambda_0 I - T)^{-1}$, $\lambda_0 \in \rho(T)$.

若 $\lambda_0 \in [m, M]$ 并且存在 $\alpha < \lambda_0 < \beta$, 在 $[\alpha, \beta]$ 上 $T_\lambda = T_\alpha$, 取

$$f(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_0 - \lambda}, & m - \delta \leqslant \lambda \leqslant \alpha \text{ 或 } \beta < \lambda \leqslant M, \\ \text{线性}, & \alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta, \end{cases}$$

则 $f(\lambda)$ 连续. 令 $B = \displaystyle\int_{m-\delta}^{M} f(\lambda) \mathrm{d}T_\lambda$, 则 $B \in B(H)$, 并且

$$\begin{aligned} (\lambda_0 I - T)B = B(\lambda_0 I - T) &= \int_{m-\delta}^{M} f(\lambda)(\lambda_0 - \lambda) \mathrm{d}T_\lambda \\ &= \int_{m-\delta}^{\alpha} \mathrm{d}T_\lambda + \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)(\lambda_0 - \lambda) \mathrm{d}T_\lambda + \int_{\beta}^{M} \mathrm{d}T_\lambda \\ &= T_\alpha - T_{m-\delta} + T_M - T_\beta = I. \end{aligned}$$

所以 $B = (\lambda_0 I - T)^{-1}$, $\lambda_0 \in \rho(T)$.

(2) 设 $\lambda_0 \in \sigma_p(T), x_0 \neq 0, (\lambda_0 I - T)x_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned} &\int_{m-\delta}^{M} |\lambda_0 - \lambda|^2 \mathrm{d}(T_\lambda x_0, x_0) = ((\lambda_0 I - T)^2 x_0, x_0) \\ &= ((\lambda_0 I - T)x_0, (\lambda_0 I - T)x_0) = 0. \end{aligned}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M} |\lambda_0 - \lambda|^2 \mathrm{d}(T_\lambda x_0, x_0) &\geqslant \varepsilon^2 \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M} \mathrm{d}(T_\lambda x_0, x_0) \\ &= \varepsilon^2((I - T_{\lambda_0+\varepsilon})x_0, x_0) = \varepsilon^2 \|(I - T_{\lambda_0+\varepsilon})x_0\|^2. \end{aligned}$$

故 $T_{\lambda_0+\varepsilon}x_0 = x_0$. 同样可证 $T_{\lambda_0-\varepsilon}x_0 = 0$, 从而 $(T_{\lambda_0+\varepsilon} - T_{\lambda_0-\varepsilon})x_0 = x_0$. 令 $\varepsilon \to 0$ 得到 $(T_{\lambda_0} - T_{\lambda_0-0})x_0 = x_0$, $x_0 \neq 0$, 故 $T_{\lambda_0} \neq T_{\lambda_0-0}$.

反之, 若 $T_{\lambda_0} \neq T_{\lambda_0-0}$, 取 $x_0 \neq 0$ 使得 $x_0 \in (T_{\lambda_0} - T_{\lambda_0-0})(H)$. 不妨设 $(T_{\lambda_0} - T_{\lambda_0-0})y_0 = x_0$. 注意若 $\lambda > \lambda_0$, 则 $T_\lambda(T_{\lambda_0} - T_{\lambda_0-0}) = T_{\lambda_0} - T_{\lambda_0-0}$. 故

$$T_\lambda x_0 = T_\lambda(T_{\lambda_0} - T_{\lambda_0-0})y_0 = (T_{\lambda_0} - T_{\lambda_0-0})y_0 = x_0.$$

同样地, 若 $\lambda < \lambda_0$, $T_\lambda x_0 = 0$, 则

$$Tx_0 = \left(\int_{m-\delta}^{M} \lambda \mathrm{d}T_\lambda\right) x_0 = \left(\int_{m-\delta}^{\lambda_0 - 0} \lambda \mathrm{d}T_\lambda + \lambda_0 + \int_{\lambda_0}^{M} \lambda \mathrm{d}T_\lambda\right) x_0 = \lambda_0 x_0.$$

所以 $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$.

从证明中知道, T 的特征向量空间即 $T_{\lambda_0} - T_{\lambda_0 - 0}$ 的值空间.

(3) 由定理 5.3.2(3), $\sigma_r(T) = \varnothing$. 由谱点的分类与谱系的单调性知道 (3) 成立.

习　题　5

以下设 X 是复Banach 空间.

1. 设 $T \in B(X), \mu$ 是 T^n 的特征值, 则有 μ 的某个 n 次方根是 T 的特征值.

2. 若 $T \in B(X)$, 则 $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} \|R_\lambda(T)\| = 0$.

3. 设 $T_n, T \in B(X)$, $\|T_n - T\| \to 0$. 若 $\lambda \in \rho(T)$, 则当 n 足够大时 $\lambda \in \rho(T_n)$, 并且 $\lim\limits_{n \to \infty} (\lambda I - T_n)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1}$ 在算子范数意义下成立.

4. 若 $T \in B(X)$ 是正则算子, 则 $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

5. 记 $\Lambda = \{\alpha_n : n \geqslant 1\} \subset C$, $\sup |\alpha_n| < \infty$. 定义

$$T : l^1 \to l^1, T(x_1, x_2, \cdots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \cdots),\ \forall x = (x_n) \in l^1.$$

证明: (1) $T \in B(l^1)$; (2) 若 $\alpha_n \to 0$, 则 $T \in C(l^1)$; (3) $\Lambda \subset \sigma_p(T)$; (4) $\sigma(T) = \overline{\Lambda}$; (5) $\sigma_c(T) = \overline{\Lambda} \backslash \Lambda$.

6. 若 $T : l^2 \to l^2$, $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$, $\forall x \in l^2$. 求 $\sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$.

7. 设 $T : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Tx)(t) = g(t)x(t)$, $\forall x \in C[0,1]$. 求 $\sigma(T)$, 其中 $g(t) = \sin \pi t$.

8. 若 $T \in B(X)$, $T^2 = T, T \neq 0, I$, 则 $\sigma(T) = \{\,0,\ 1\,\}$.

9. 设 $T_1, T_2 \in B(X)$ 并且 $T_1 T_2 = T_2 T_1$, 则

$$r(T_1 T_2) \leqslant r(T_1) r(T_1), \qquad r(T_1 + T_2) \leqslant r(T_1) + r(T_1).$$

10. 设 $T \in B(X), \alpha \in \Phi$, k 是自然数, 则

$$r(\alpha T) = |\alpha| r(T), \qquad r(T^k) = r(T)^k.$$

11. 设 $T : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$, $Tx(t) = tx(t)$. 证明:

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) = [a,b], \qquad \sigma_p(T) = \sigma_r(T) = \emptyset.$$

12. 求算子 $T : C[0,1] \to C[0,1]$ 的谱, 其中 $(Tx)(t) = x(t^2)$.

13. 试求积分算子 $T \in B(L^2[0,1])$, $Tx(t) = \displaystyle\int_0^1 \sin 2\pi(t-s)x(s)\mathrm{d}s$ 的特征值与特征向量.

14. 举出例子 $T \in B(X), T \neq 0$, 但 $\sqrt[n]{\|T^n\|} \to 0$.

15. 设$Y \subset X$是线性子空间, $T \in B(X)$. 若$T(Y) \subset Y$, 则称Y是T的不变子空间. 证明:

(1) T 的每个特征子空间是 T 的不变子空间.

(2) 若 Y 是 T 的不变子空间, 则 $\overline{Y}$ 也是.

(3) $R(T^n), N(T^n)$ 是 T 的不变子空间.

(4) 若 $T_1 \in B(X)$ 并且 $T_1T = TT_1$, 则 $R(T_1), N(T_1)$ 都是 T 的不变子空间.

16. 设 $Y \subset X$ 是线性子空间, $T_1 \in B(Y), T \in B(X)$ 并且 T 是 T_1 的延拓. 证明:

(1) $\sigma_p(T_1) \subset \sigma_p(T)$, $\sigma_r(T_1) \supset \sigma_r(T)$.

(2) $\forall \lambda \in \sigma_p(T_1)$, T_1 关于 λ 的特征向量空间是 T 相应于 λ 的特征向量空间的子空间.

以下设 H 是复Hilbert 空间.

17. 若 $T \in B(H)$, $\{e_n\}$ 是 H 的标准正交基, 并且

$$(Te_n, e_m) = \overline{(Te_m, e_n)}, \qquad \forall m, n \geqslant 1,$$

则 T 是自伴算子.

18. 若 $T \in B(H)$ 是自伴算子, 则 $T \geqslant 0$ 当且仅当 $m \geqslant 0$, 其中 $m = \inf\{\mu : \mu \in \sigma(T)\}$. 此时 T 有有界逆当且仅当 $m > 0$.

19. 验证:

(1) 0算子、单位算子 I、投影算子都是正算子.

(2) 若 $T \in B(H)$ 是自伴算子, 则 $T^2 \geqslant 0$.

(3) $\forall T \in B(H)$, $TT^* \geqslant 0$, $T^*T \geqslant 0$.

(4) 若 $T \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$, 则 $\alpha T \geqslant 0$.

(5) $T \geqslant 0, S \geqslant 0$, 则 $T + S \geqslant 0$.

20. 若 T 是酉算子并且 $T \geqslant 0$, 则

$$|(Tx, y)|^2 \leqslant (Tx, x)(Ty, y), \qquad \forall x, y \in H.$$

21. 证明对于正常算子 $T \in B(H)$, $\|T^2\| = \|T\|^2$, $r(T) = \|T\|$.

22. 设 $T \in B(H)$, 若 $\forall x \in H, (Tx, x) \geqslant 0$, 则 $(I + T)^{-1}$ 存在.

23. 设 $T \in B(H)$, H 是复空间, 则 $(I + T^*T)^{-1}$ 存在.

24. 若 $T \in B(H)$, $\sigma(T) \subset (0, \infty)$, 证明存在算子 $S \in B(H)$ 使得 $T = e^S$.

25. 设 $T \geqslant 0$, 证明 $\|T^{\frac{1}{2}}\| = \|T\|^{\frac{1}{2}}$.

26. 若 $v_\lambda(t) = x(t)\chi_{[0,\lambda]}, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 验证下面是第 11 题中的算子 T 的谱系:

$$T_\lambda x = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ v_\lambda, & 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ x, & \lambda > 1. \end{cases}$$

参 考 文 献

江泽坚, 吴智泉. 1996. 实变函数论. 北京: 高等教育出版社

夏道行等.1979. 实变函数论与泛函分析. 北京: 人民教育出版社

张恭庆, 林源渠. 1987. 泛函分析讲义. 北京: 北京大学出版社

Натансон П И. 1955. 实变函数论. 徐瑞云译. 北京: 人民教育出版社

Yosida K.1980. 泛函分析. 吴元凯等译. 北京: 人民教育出版社

Heuser H G. 1982. Functional Analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Reed M, Simon B.1972. Methods of Modern Mathematical Phisics I, Functional Analysis. New York, London: Academic Press

Rudin W. 2004. 泛函分析. 刘培德译. 北京: 机械工业出版社

Taylor A E, Lay D C. 1980. Introduction to Functional Analysis. New York: John Wiley & Sons,Inc.

附录 A　等价关系　序集　Zorn 引理

定义 A.1　设 X 是某个集合, "$\sim$" 是定义在 X 的元素之间的某种关系, 满足

(1) $\forall x \in X$, $x \sim x$(自反性);

(2) $\forall x, y \in X$, $x \sim y$, 则 $y \sim x$ (对称性);

(3) $\forall x, y, z \in X$, $x \sim y$, $y \sim z$, 则 $x \sim z$ (传递性).

则称 "$\sim$" 是 X 上的等价关系. $x \sim y$ 时称 x 与 y 等价.

例如, 整数集合中的 "同余" 是一种等价关系, 几何学中三角形之间的 "相似" 是等价关系. 还可以举出其他很多例子.

将 X 中彼此等价的元素视为一个类, 与元素 a 等价的类记为 $\overline{a}$, 所有等价类的全体称为 X 关于等价关系 "$\sim$" 的商集, 记为 $X/\sim$. 换句话说 $X/\sim = \{\overline{a} : a \in X\}$.

命题 A.1　两个类 $\overline{a}, \overline{b} \in X/\sim$, 要么 $\overline{a}, \overline{b}$ 不相交, 要么 $\overline{a} = \overline{b}$.

证明　若 $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \varnothing$ (注意这里对于集合 $X/\sim$ 而言, $\overline{a}, \overline{b}$ 是元素; 对于 X 而言, $\overline{a}, \overline{b}$ 是集合, 故有此写法), 如 $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$, 由 $c \in \overline{a}$ 知道 $a \sim c$, 由 $c \in \overline{b}$ 知道 $c \sim b$, 由传递性得到 $a \sim b$, 于是 $a \in \overline{b}$, 从而 $\overline{a} \subset \overline{b}$. 同理得到 $\overline{b} \subset \overline{a}$. 所以 $\overline{a} = \overline{b}$.

定义 A.2　设 X 是某个集合, "$\leqslant$" 是定义在 X 的元素之间的某种关系, 满足

(1) $\forall x \in X$, $x \leqslant x$(自反性);

(2) $\forall x, y \in X$, $x \leqslant y$, $\quad y \leqslant x$, 则 $x = y$(反对称性);

(3) $\forall x, y, z \in X$, $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$ (传递性).

则称 "$\leqslant$" 是 X 上的半序. 称 X 是半序集. 若此外有

(4) $\forall x, y \in X, x \leqslant y$ 与 $y \leqslant x$ 至少有一项成立, 则称 X 是全序集.

例如, 任一集合的全体子集构成的集族以集合的包含关系作为半序是一个半序集族. 另外容易知道, 一个半序集的子集有可能是全序集. $x \leqslant y$ 又写作 $y \geqslant x$.

设 X 是半序集, $A \subset X$ 是某个子集, $b \in X$. 若 $\forall x \in A$ 都有 $x \leqslant b$, 则称 b 是 A 的上界. 元素 $m \in X$ 称为 X 的极大元, 若当 $x \in X, x \geqslant m$ 时, 必有 $m = x$. 类似地可以定义子集合的下界和 X 的极小元.

在很多问题中需要确定半序集的极大元或极小元的存在性. 但一般说来极大元可能根本不存在, 存在时也不见得唯一.

例　设 X 是平面上的单位圆盘. 其中规定两点 "$P \leqslant Q$" 当且仅当 P, Q 位于从原点 O 出发的同一条射线上, 并且 OP 的长度小于或等于 OQ 的长度. 可以证明 X 是半序集. 进一步地, 若圆盘是开的, 则 X 无极大元; 若圆盘是闭的, 则圆周上的每一点都是 X 的极大元.

下面引理给出了判定半序集存在极大元的准则.

引理(Zorn) 设 X 是非空半序集, 若其中每个全序子集都有上界, 则 X 有极大元.

Zorn 引理虽称为引理, 但实为公理. 它和 Cantor 的良序公理、Zermero 的选择公理都是基础数学中的基本公理并且彼此等价. 有兴趣的读者可参看 J.L.Kelley 的 General Topology(有中译本).

为了掌握 Zorn 引理的应用, 这里给出线性空间具有Hamel 基的证明. 有关的概念可以参看本书 1.1 节.

命题 A.2 任何非 0 线性空间必存在Hamel 基.

证明 设 X 是线性空间,$X \neq \{0\}$. 记 X 中线性无关集合的全体为 $\mathfrak{M}$, 以集合的包含关系为半序, 则 $\mathfrak{M}$ 是非空半序集. 若 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的全序子集, 不妨记 $\mathfrak{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. 令 $E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. 首先 E 是线性无关集, 因为 $\forall x_1,\cdots,x_n \in E$, 若 $x_i \in A_{\lambda_i}, i = 1,\cdots,n$, 由全序性, 不妨设 $A_{\lambda_i} \leqslant A_{\lambda_n}, i = 1,\cdots,n-1$. 则 $x_1,\cdots,x_n \in A_{\lambda_n}$, 后者是线性无关集, 所以 $x_1,\cdots,x_n$线性无关, 故 $E \in \mathfrak{M}$. 其次由包含关系可知 $E \geqslant A_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda$, 所以 E 是 $\mathfrak{A}$ 的上界.

由 Zorn 引理, $\mathfrak{M}$ 存在有极大元, 记为 H, 我们证明 H 即是 X 的Hamel 基. 实际上 H 是线性无关集, 若有某个 $y \in X$ 不能用 H 中任何有限元素组线性表示, 换句话说 y 与 H 中任意有限多个元素线性无关, 此时 $H' = H \cup \{y\}$ 是线性无关集, $H' \in \mathfrak{M}$ 并且 $H' \geqslant H, H' \neq H$. 这与 H 是 $\mathfrak{M}$ 的极大元矛盾. 证毕.

索　引

L

N

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

其　他

[General Information]
□□=□□□□□□□ □□□□□□
□□=□□□□□
□□=216
SS□=11581126
DX□=
□□□□=2006□01□□1□
□□□=□□□□□

□□A□□□□□□□□□Zorn□□
□□